Equazioni differenziali ordinarie (ODE) lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Fulvio Bisi
Corso di Analisi Matematica A (ca)
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria

1 ODE lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

1.1 ODE omogenee

Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria omogenea

$$a\,\ddot{y}(t) + b\,\dot{y}(t) + c\,y(t) = 0\,, \tag{1}$$

in cui abbiamo indicato con $t \in \mathbb{R}$ la variabile indipendente, e con un punto/due punti sopra la funzione $y(t)$ la derivata prima/seconda rispetto a t (secondo l'uso introdotto da Newton). Siano $a \neq 0, b, c$ costanti reali.

Definizione 1.1. *Chiamiamo polinomio caratteristico associato all'ODE (1) il polinomio*

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Indichiamo con

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \tag{3}$$

il discriminante dell'equazione algebrica per determinare le radici del polinomio (2), ossia

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0\,. \tag{4}$$

Definizione 1.2. *Sia* $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$*; definiamo l'esponenziale complesso come*

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \exp(a)\exp(ib) = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b). \tag{5}$$

È facile convincersi che l'esponenziale così definito gode delle consuete proprietà della funzione esponenziale reale; in particolare, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_1}$.

Trattando l'unità immaginaria come una costante ed estendendo le regole di derivazione anche all'esponenziale complesso abbiamo il semplice

Teorema 1.1. *Siano $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, con $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Allora, $\forall t$, la derivata $(\mathrm{e}^{\lambda t})'$ rispetto a t è data da $\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$ (ossia, la regola della derivata della funzione esponenziale si estende).*

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere, usando le regole di derivazione

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{\lambda t})' &= (\mathrm{e}^{\sigma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t))' \\
&= \sigma \mathrm{e}^{\sigma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) + \omega \mathrm{e}^{\sigma t}(-\sin \omega t + i \cos \omega t)) \\
&= \sigma \mathrm{e}^{\sigma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) + i\omega \mathrm{e}^{\sigma t}(i \sin \omega t + \cos \omega t)) \\
&= (\sigma + i\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\
&= \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \,,
\end{aligned} \tag{6}$$

dove abbiamo sfruttato l'identità $-1 = i \cdot i$. □

È facile verificare che la soluzione generale $y_o(t)$ dell'ODE (1) prende forme diverse a seconda del segno di Δ, ossia:

1. Se $\Delta > 0$, dette λ_1 e λ_2 le due radici reali e distinte del polinomio caratteristico,
$$y_o(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{7}$$
con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ costanti da determinare tramite le eventuali condizioni iniziali in un problema di Cauchy.

2. Se $\Delta = 0$, detta $\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$ la radice reale doppia del polinomio caratteristico,
$$y_o(t) = C_1 \exp(\lambda_0 t) + C_2 \, t \exp(\lambda_0 t) \tag{8}$$
con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ costanti da determinare tramite le eventuali condizioni iniziali in un problema di Cauchy.

3. Se $\Delta < 0$, dette $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ le due radici complesse coniugate del polinomio caratteristico, con $\sigma := -\frac{b}{2a}$ e $\omega := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$$y_o(t) = \exp(\sigma \, t) \, (C_1 \sin(\omega \, t) + C_2 \cos(\omega \, t)) \tag{9}$$
con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ costanti da determinare tramite le eventuali condizioni iniziali in un problema di Cauchy.

   In quest'ultimo caso, potremmo ricorrere ad una forma della soluzione equivalente alla (9) usando la forma della (7), con una combinazione tramite coefficienti complessi di esponenziali complessi:
$$y_o(t) = K_1 \exp(\lambda_1 t) + K_2 \exp(\lambda_2 t) \,, \tag{10}$$
con $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ costanti complesse da determinare mediante le condizioni iniziali.

   Se la soluzione cercata è reale, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si avrà che il complesso coniugato $\overline{y_o(t)}$ della funzione soluzione deve coincidere con $y_o(t)$. Ricordando che, in questo caso $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, ed osservando dalla (5) che, per ogni numero complesso z, si ha $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$, possiamo scrivere:
$$\overline{y_o(t)} = \overline{K_1}\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1} t} + \overline{K_2}\mathrm{e}^{\overline{\lambda_2} t} = \overline{K_1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \overline{K_2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \overline{K_2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \overline{K_1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \,. \tag{11}$$

Poiché ciò deve essere identicamente vero per ogni t, allora $K_1 = \overline{K_2}$, ossia le due costanti sono complesse coniugate. La (10), quindi, contiene solo due costanti reali indipendenti da determinare, come la (9).

In particolare, possiamo scrivere la (10) esplicitamente come

$$y_o(t) = K_1 \exp(\sigma\, t)(\cos\omega\, t + i \sin\omega\, t) + K_2 \exp(\sigma\, t)(\cos\omega\, t - i \sin\omega\, t) \quad (12)$$

che, confrontata con la (9) dà:

$$K_1 + K_2 = K_1 + \overline{K_1} = 2\Re(K_1) = C_2 \quad (13a)$$

$$(K_1 - K_2)i = i(K_1 - \overline{K_1}) = -2\Im(K_1) = C_1 \quad (13b)$$

Notiamo che, se $b = 0$ e $c \neq 0$ i casi 1 e 3 possono essere ricondotti all'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) \pm \omega_0^2\, y(t) = 0\,, \quad (14)$$

in cui vale il segno $-$ per il caso 1 ed il segno opposto per il caso 3, ponendo $\omega_0^2 := |c/a|$. Se a e c hanno segno opposto la soluzione generale dell'ODE (14) si può scrivere anche usando le funzioni iperboliche $\sinh x$ e $\cosh x$ secondo la forma

$$y_o(t) = K_1 \sinh(\omega_0 t) + K_2 \cosh(\omega_0 t)\,, \quad (15)$$

in cui le costanti $K_{1,2}$ sono legate alle $C_{1,2}$ usate nella forma (7) secondo le seguenti semplici relazioni

$$K_{1,2} := C_1 - (\pm) C_2\,, \quad (16)$$

come si può verificare usando le definizioni delle funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,. \quad (17)$$

1.2 ODE non omogenee

Prendiamo ora in esame l'equazione differenziale ordinaria non omogenea

$$a\, \ddot{y}(t) + b\, \dot{y}(t) + c\, y(t) = f(t)\,, \quad (18)$$

in cui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di variabile reale nota. Diremo che l'equazione (1) è l'equazione omogenea associata alla (18).

Definizione 1.3. *Diremo che una funzione $y_p(t)$ definita in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ è una soluzione particolare dell'ODE (18) se non è ottenibile mediante alcuna scelta delle costanti $C_{1,2}$ nella soluzione del'ODE (1) associata.*

Vale allora il seguente

Teorema 1.2. *Sia $y_p(t)$ una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea (18); sia $y_o(t)$ la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Allora la soluzione generale $y(t)$ dell'equazione differenziale non omogenea si può scrivere come*

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t)\,. \quad (19)$$

Dovendo determinare le costanti generiche in (19) per un problema di Cauchy, si ricorda che questo deve essere fatto solo *dopo* avere aggiunto la soluzione particolare a quella dell'omogenea, e non prima.

In generale la ricerca della soluzione particolare può non essere di facile approccio; ciò risulta, tuttavia, relativamente semplice per le classi più comuni di funzioni $f(t)$ in 18, comprendenti gli esempi più frequenti nei problemi di meccanica classica.

1.3 Soluzioni di prova per le ODE non omogenee

Supponiamo di divere cercare una soluzione particolare per l'equazione differenziale lineare 18, in cui il termine non omogeneo $f(t)$ risulta essere il prodotto di un polinomio $P_n(t)$ di grado n in t con una funzione esponenziale del tipo $\exp(\mu\, t)$ e con una funzione trigonometrica del tipo $\sin(kt)$ o $\cos(kt)$. La soluzione particolare si cercherà nella stessa forma del termine non omogeneo, eventualmente moltiplicando tutto per t o t^2, se la stessa forma di partenza sarebbe in realtà soluzione anche dell'equazione omogenea.

Nel dettaglio, indichiamo con $A_n(t)$, $B_n(t)$ e $P_n(t)$ dei polinomi di grado n in t, ossia:

$$A_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \tag{20a}$$

$$B_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots b_n t^n = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \tag{20b}$$

$$A_n(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots p_n t^n = \sum_{i=0}^{n} p_i t^i \,, \tag{20c}$$

in cui a_i, b_i e p_i sono costanti reali per ogni $i \in \mathbb{N}$ con $i = 1 \dots n$. Possiamo quindi considerare il seguente prospetto:

$$f(t) = P_n(t)\,, \text{ si usa } y_p(t) = t^m A_n(t)\,; \tag{21a}$$

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)\,, \text{ si usa } y_p(t) = t^m \mathrm{e}^{\mu t} A_n(t)\,; \tag{21b}$$

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)\cos(kt)\,, \text{ si usa } y_p(t) = t^m \mathrm{e}^{\mu t}[A_n(t)\cos(kt) + B_n(t)\sin(kt)]\,; \tag{21c}$$

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mu t} P_n(t)\sin(kt)\,, \text{ si usa } y_p(t) = t^m \mathrm{e}^{\mu t}[A_n(t)\cos(kt) + B_n(t)\sin(kt)]\,; \tag{21d}$$

in tutte le funzioni di prova (21), l'esponente m delle potenze di t che moltiplicano il resto può assumere i valori 0, 1, e 2, e si deve scegliere il più piccolo fra questi valori che garantisca che nessun termine della $y_p(t)$ sia soluzione anche dell'omogenea associata.

Si può anche adottare la seguente regolina pratica. Si parte a cercare la soluzione particolare nella stessa forma del termine non omogeneo $f(t)$, e se non è possibile determinare coefficienti che diano la soluzione particolare, la forma provata è soluzione dell'equazione omogenea; ciò vuole dire che la funzione di prova deve essere innalzata di un grado, moltiplicando tutto per t. Se la situazione si ripete, occorre moltiplicare per t^2.

Esempio 1.1. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 9y(t) = \sin 3t\,, \\ y(0) = 1\,, \\ \dot{y}(0) = 0\,. \end{cases} \tag{22}$$

Cerchiamo le radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 9 = 0\,, \tag{23}$$

cioè $\lambda = \pm 3i$. Siamo nel caso (9), con $\sigma = 0$. Scriviamo quindi per la soluzione dell'omogenea:

$$y_o(t) = A\sin(3t) + B\cos(3t)\,. \tag{24}$$

La soluzione particolare avrà pertanto la forma

$$y_P(t) = t(\alpha\sin(3t) + \beta\cos(3t))\,, \tag{25}$$

dove dobbiamo introdurre il fattore t complessivo, perché $y(t) = \alpha\sin(3t) + \beta\cos(3t)$ sarebbe ancora soluzione dell'omogenea. Derivando due volte la (24) e sostituendo nell'equazione originaria (22) ricaviamo i valori $\alpha = 0$ e $\beta = -1/6$. Otteniamo, pertanto, per la soluzione generale:

$$y(t) = A\sin(3t) + B\cos(3t) - \frac{1}{6}t\cos(3t)\,. \tag{26}$$

L'imposizione delle condizioni iniziali consente di arrivare alla soluzione particolare del problema (22):

$$y(t) = \frac{1}{18}\sin(3t) + \cos(3t) - \frac{1}{6}t\cos(3t)\,. \tag{27}$$

Esempio 1.2. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 1\,, \\ y(0) = 2\,, \\ \dot{y}(0) = 0\,. \end{cases} \tag{28}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. La soluzione dell'equazioneomogenea associata è, dunque:

$$y_o(t) = A\mathrm{e}^{0\cdot} + B\mathrm{e}^{-1\cdot} = A + B\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{29}$$

Il termine noto è una costante (polinomio di grado 0), che è anche soluzione dell'omogenea con $B = 0$; la soluzione particolare sarà dunque un polinomio di grado 0 moltiplicato per t, ossia:

$$y_P(t) = K\,t\,, \tag{30}$$

con la costante K da determinare iun modo che sia soluzione dell'equazione completa.

Derivando una e due volte otteniamo:

$$0 + K = 1\,, \tag{31}$$

cioè $K = 1$. La soluzione generale sarà, pertanto

$$y(t) = A + B\mathrm{e}^{-t} + t\,, \tag{32}$$

e, imponendo le condizioni iniziali, la soluzione del problema di Cauchy diventa

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + 1 + t\,. \tag{33}$$

Osserviamo che l'equazione differenziale originaria (28) può essere ricondotta ad una del primo ordine mediante la sostituzione $\dot{y}(t) = u(t)$:

$$\dot{u} + u = 1\,. \tag{34}$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari di primo ordine, poniamo $a(t) = 1$, $A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = t$, $b = 1$; otteniamo

$$u(t) = \mathrm{e}^{-A(t)} \int 1\, \mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t} \int \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{t} + C_1) = 1 + C_1\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{35}$$

Integrando la $u(t)$ otteniamo

$$y(t) = \int u(t)\mathrm{d}t = \int (1 + C_1\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = t - C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\,, \tag{36}$$

che è equivalente alla soluzione (32).