L'esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$

Fulvio Bisi
Corso di Analisi Matematica A (ca)
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria

1 Introduzione

Vengono estese in $\mathbb{R}$ le operazioni di addizione e moltiplicazione definite in $\mathbb{Q}$, dotando quindi anche questo nuovo insieme della struttura di campo, e la relazione di ordinamento totale.

A questo punto, è possibile dimostrare l'esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ a partire dall'assioma di completezza, che esprimiamo nella forma

Assioma 1.1. *(di completezza) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente; allora esiste in $\mathbb{R}$ il suo estremo superiore* $\sup A$.

Inoltre, per comodità, supponiamo di avere dimostrato anche la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, che possiamo enunciare come

Teorema 1.1. *(proprietà di densità) Comunque vengano presi due numeri reali x ed y distinti, esiste sempre un numero razionale q compreso fra essi; in altre parole*
$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \; x < y \quad \exists\, q \in \mathbb{Q} : \; x < q < y\,.$

(In dettaglio, questa proprietà viene mostrata in appendice, ed è una conseguenza della proprietà di Archimede).

Abbiamo inoltre dimostrato che $\sqrt{2}$ non può essere un numero razionale, ossia che

$$\nexists\, q \in \mathbb{Q} \quad | \quad q^2 = 2\,.$$

Consideriamo gli insiemi A e B così definiti:

$$A := \{a \in \mathbb{R} : \quad a^2 \le 2\} \subset \mathbb{R}\,, \tag{1a}$$
$$B := \{q \in \mathbb{Q} : \quad q^2 \le 2\} \subset \mathbb{Q}\,; \tag{1b}$$

è facile convincersi che A e B sono limitati. Basta provare prima questo semplice lemma:

Lemma 1.1. *(del maggiorante di A) Sia $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$ tale che $x^2 \ge 2$; allora, x è un maggiorante di A. Analogamente, sia $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 \ge 2$; allora q è un maggiorante di B in $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Si ha, $\forall\, y \ge x > 0$, $y^2 > x^2 \ge 2$. Pertanto, se un numero y è maggiore di x, allora è maggiore di 2; non può dunque appartenere ad A, poiché per esso non vale la proprietà $y^2 \leq 2$. In altre parole, se $x^2 \geq 2$ qualunque numero di A può essere solo minore o uguale a x, ossia, in simboli

$$\forall\, a \in A\,, \quad a \leq x\,,$$

che esprime proprio il fatto che x è un maggiorante di A. In modo del tutto simile si procede per il secondo insieme con i numeri razionali. □

A questo punto, basta osservare che, preso ad esempio $p \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tale che $p = \frac{3}{2}$; avremo: $p^2 = \frac{9}{4} > 2$, quindi, in base al lemma precedente, $\frac{3}{2}$ è un maggiorante di A e B (e si potrebbe dimostrare che $-\frac{3}{2}$ ne è un minorante). Pertanto possiamo scrivere $A, B \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$; in particolare, sia A che B sono superiormente limitati. L'assioma di completezza garantisce quindi che l'estremo superiore di A e B esista in $\mathbb{R}$.

Possiamo quindi porre:

$$r := \sup A \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Resta solo da convincersi che $r = \sqrt{2}$, ossia che $r^2 = 2$.

Per procedere in modo rigoroso, ci serve un utile lemma:

Lemma 1.2 (del quadrato intermedio)**.** *Sia* $\delta \in \mathbb{R}$*; se* $\delta > 1$*, esiste* $\sigma \in \mathbb{Q}$ *tale che* $1 < \sigma^2 < \delta$*.*

Dimostrazione. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (1.1), essendo $1, \delta \in \mathbb{R}$,

$$\exists \gamma' \in \mathbb{Q}\,: \quad 1 < \gamma' < \delta\,;$$

ora, se $(\gamma')^2 \neq \delta$ poniamo $\gamma = \gamma\prime$, altrimenti, basta prendere γ in modo che $1 < \gamma < \gamma' < \delta$, sempre grazie alla densità.

A questo punto, possono verificarsi due casi:

1. $\gamma^2 < \delta$, allora ponendo $\sigma := \gamma$ abbiamo finito.
2. Altrimenti, $\gamma^2 > \delta$, e il caso di uguaglianza resta escluso per la scelta fatta di γ. Poniamo $\sigma := \frac{\delta}{\gamma}$; si ha sicuramente $\sigma^2 > 1$, poiché $\delta > \gamma$. Inoltre, risulta anche $\sigma^2 < \delta$; se così non fosse, infatti, avremmo

   $$\sigma^2 = \frac{\delta^2}{\gamma^2} \geq \delta\,.$$

   Inoltre, $\gamma^2 > \delta$; possiamo moltiplicare termine a termine le due ultime disuguaglianze e ottenere

   $$\delta^2 > \delta^2\,,$$

   che è assurdo. Pertanto, deve essere $\sigma^2 < \delta$.

In ogni caso, è stato trovato il numero σ richiesto dall'enunciato. □

Possiamo quindi enunciare il nostro piccolo, ma didatticamente significativo teorema:

Teorema 1.2. *Sia* $r \in \mathbb{R}$ *definito dalla (2); allora,* $r = \sqrt{2}$*; in altre parole:* $r^2 = 2$*.*

Dimostrazione. Sappiamo che solo uno dei seguenti casi può verificarsi:

$$r^2 > 2\,; \quad r^2 < 2\,; \quad r^2 = 2\,.$$

Mostriamo che *non* può essere $r^2 < 2$: se, infatti, fosse vero questo, potremmo scrivere

$$1 < \frac{2}{r^2} =: \delta\,.$$

In base al Lemma (1.2), sappiamo che esiste $\sigma > 1$ in $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tale che

$$1 < \sigma^2 \leq \frac{2}{r^2}\,,$$

ossia, poiché tutti i numeri della disuguaglianza sono positivi, $(\sigma\, r)^2 \leq 2$ e, pertanto, $\sigma\, r \in A$. D'altro canto, $\sigma > 1$, quindi $\sigma r > r$; avrei, quindi, trovato un numero in A maggiore di r: questo contrasta con il fatto che $r = \sup A$, quindi è un maggiorante di A. Quindi escludiamo che possa essere $r^2 < 2$.

Supponiamo ora di avere $r^2 > 2$; allora

$$1 < \frac{r^2}{2} =: \delta\,.$$

e, ancora per il Lemma del quadrato intermedio, esiste un numero $\sigma > 1$ tale che

$$1 < \sigma^2 \leq \frac{r^2}{2}\,,$$

cioè

$$\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2 \geq 2\,.$$

Ma $\sigma > 1$, quindi $r/\sigma < r$ e avrei quindi trovato un maggiorante di A in base al Lemma (1.1) più piccolo di r; questo ancora contrasta con il fatto che $r = \sup A$. Quindi escludiamo pure che possa essere $r^2 > 2$.

Allora resta solo che $r = 2$. $\square$

Lasciamo al lettore il semplice esercizio di ripercorrere i passi appena compiuti per l'insieme B; ricordando che non può essere $\sup B \in \mathbb{Q}$, è facile convincersi che, data anche l'unicità dell'estremo superiore, $\sup B = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

A Appendice: la proprietà di Archimede e la densità dei razionali

Mostriamo in questa appendice i teoremi che conducono a dedurre la densità dei razionali nei reali data la completezza dei reali, definita secondo l'Assioma (1.1).

Teorema A.1. *(Proprietà di Archimede) Comunque vengano scelti $a, b \in \mathbb{R}^+$ (ossia, a, b strettamente positivi), esiste sempre un numero naturale n tale che $na > b$.*

Questa proprietà viene detta proprietà di Archimede, poiché viene attribuita al matematico siracusano la formulazione geometrica, riportata anche negli elementi di Euclide, che afferma che presi due segmenti qualunque, esiste sempre il multiplo di uno che sia maggiore dell'altro.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che sia falsa la tesi; allora

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad na \le b\,.$$

In altre parole, questo vorrebbe dire che l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \quad x = na\,, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato superiormente, essendo b un suo maggiorante. Poniamo allora $\mu := \sup S$; per le proprietà dell'estremo superiore (minimo dei maggioranti), se consideriamo $\lambda = \mu - a < \mu$, dovrebbe esistere in S un elemento maggiore di λ, ossia

$$\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \quad \overline{n}a > \lambda = \mu - a\,,$$

cioè, riordinando, $(\overline{n}+1)\, a > \mu$. D'altra parte, $(\overline{n}+1) \in \mathbb{N}$, quindi $(\overline{n}+1)\, a \in S$. Ossia, esisterebbe un numero in S maggiore di $\sup S$, che è impossibile per le proprietà dell'estremo superiore. $\square$

Mediante questa proprietà possiamo adesso mostrare il Teorema (1.1) enunciato nel testo.

Dimostrazione. Se $x < 0 < y$, o viceversa, 0 è un numero razionale che soddisfa le richieste.

Sia ora $0 \le x < y$; per la proprietà di Archimede, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(y - x) > 1 \in \mathbb{R}\,,$$

ossia $ny - nx > 1$. Siccome la differenza fra ny e nx è maggiore dell'unità, esiste un numero naturale m positivo compreso fra essi:

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^+ : \quad nx < m < ny\,.$$

Dividendo per n si ottiene:

$$x < m/n < y\,,$$

perciò il numero $q = m/n \in \mathbb{Q}$ soddisfa le richieste della tesi.

Infine, se $x < y \le 0$, basta osservare che, allora $0 \le -y < -x$, quindi, in base a quanto detto al paragrafo precedente, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-y < q < -x$, e, quindi, $x < -q < y$: $-q$ è il numero razionale richiesto. $\square$