Nozioni elementari di spazi metrici e topologia

Fulvio Bisi
Corso di Analisi Matematica A (ca)
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria

1 Distanza

Definizione 1.1. *Sia M un insieme (per esempio, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$); una funzione*

$$d: \quad M \times M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

viene chiamata distanza *se gode delle seguenti proprietà:*

$\mathcal{D}_1$) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

$\mathcal{D}_2$) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$,

$\mathcal{D}_3$) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in M$.

La $\mathcal{D}_3$ viene detta *disuguaglianza triangolare*: la ragione di questo è maggiormente chiara se si considera il seguente

Esempio 1.1. *Sia $M = \mathbb{R}^2$ la distanza pitagorica δ (detta anche euclidea) fra due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, che viene calcolata come $\delta(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, è una distanza nel senso della definizione data.*

La semplice verifica delle tre proprietà è lasciata al lettore: si ricorda che nella geometria piana euclidea, ciascun lato di un triangolo è minore della somma degli altri due, da cui la denominazione data in precedenza alla $\mathcal{D}_3$.

Definizione 1.2. *Chiameremo* spazio metrico *un insieme M sul quale sia definita una distanza.*

Definizione 1.3. *Sia M uno spazio metrico e d la sua distanza; per ogni $\boldsymbol{x}_0 \in M$ chiamiamo intorno di centro $\boldsymbol{x}_0$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ l'insieme*

$$I_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in M : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < r\}.$$

In generale, se $M = \mathbb{R}^n$, la distanza utilizzata è quella pitagorica; per $n = 1$ (ossia, se $M = \mathbb{R}$), si ha $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, e quindi la definizione coincide con quella usata nel libro di testo.

Definizione 1.4. *Sia $\boldsymbol{x}_0$ un punto di uno spazio metrico M; chiamiamo* famiglia di intorni *di centro $\boldsymbol{x}_0$ l'insieme*

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{x}_0} = \{I_r(\boldsymbol{x}_0) \subseteq M : r \in \mathbb{R}^+\}.$$

Chiameremo *spazio topologico* uno spazio metrico per ogni punto x_0 del quale è possibile determinare una famiglia di intorni $\mathcal{I}_{\boldsymbol{x}_0}$. Nel caso della definizione 1.4 diremo anche che la toplogia viene dedotta dalla metrica, in base alla definizione 1.3; sarebbe possibile anche una definizione più generale di spazio topologico, partendo dalla definizione di una famiglia di intorni costruita in modo che questi intorni godano di determinate proprietà (che sono vere anche nel nostro caso particolare); addirittura, in certi casi è possibile dedurre una metrica dalla topologia (*spazi topologici metrizzabili*). Comunque, questa trattazione esulerebbe dal nostro àmbito, pertanto l'impostazione data risulta sufficiente. D'ora in avanti, fino alla fine del capitolo, ogni volta che parleremo dello spazio M intenderemo che esso sia considerato topologico, mediante la famiglia di intorni indotta dalla distanza, e, nel caso di $\mathbb{R}^n$, assumeremo che questa è la distanza euclidea. Inoltre, M costituirà l'insieme ambiente (o universo), dove vengono presi tutti gli insiemi di cui si parla.

Se consideriamo l'insieme $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (*retta estesa*), possiamo estendere il concetto di intorno anche ai punti $\{-\infty, +\infty\}$; in particolare, chiameremo *intorno di $+\infty$ di estremo inferiore a* l'insieme

$$I_a(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\,,$$

e *intorno di $-\infty$ di estremo superiore a* l'insieme

$$I_a(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}\,;$$

queste definizioni consentono di enunciare molte proprietà e teoremi sui limiti in modo molto compatto, poiché il simbolo usato per intorni di centro finito è lo stesso di quello introdotto per intorni di $\pm\infty$.

Definizione 1.5. *Diremo che una proprietà $P(\boldsymbol{x})$ vale* nell'intorno di $\boldsymbol{x}_0$ *(o in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$) se esiste $I_r(\boldsymbol{x}_0)$ con r opportuno tale che $P(\boldsymbol{x})$ è vera $\forall \boldsymbol{x} \in I_r(\boldsymbol{x}_0)$.*

Ovviamente, per le proprietà della distanza e la definizione di intorno, se $P(\boldsymbol{x})$ è vera in $I_r(\boldsymbol{x}_0)$, allora è vera in tutti gli intorni $I_s(\boldsymbol{x}_0)$ con $s < r$.

Esempio 1.2. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in modo che $f(x) := 2x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è strettamente positiva nell'intorno del punto $x_0 = 1$.*

Infatti, poiché la disequazione $2x - 1 > 0$ è soddisfatta per $x > \frac{1}{2}$, l'intorno $I_{1/2}(1)$ soddisfa la richiesta della 1.5.

Definizione 1.6. *Sia $\boldsymbol{x}_0$ un punto di uno spazio topologico M; diciamo che $\boldsymbol{x}_0$ è aderente a $T \subseteq M$ se se per ogni intorno U di $\boldsymbol{x}_0$, esiste almeno un punto dell'intorno appartenente a T, ossia se*

$$\forall U = I_r(\boldsymbol{x}_0) \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{x}_0}\,, \quad U \cap T \neq \emptyset\,.$$

Osserviamo che, se un punto $\boldsymbol{x}_0 \in T$ allora, banalmente, $\boldsymbol{x}_0$ è aderente a T. Esistono però punti aderenti a T, anche se non appartenenti a T: questo giustifica la definizione. A tale proposito, consideriamo il seguente

Esempio 1.3. *Sia T l'insieme così definito:*

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}\,, n \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}\,;$$

il punto $x_0 = 0$ è aderente a T, ma non appartiene a T.

Infatti, per vedere che $0 \notin T$, basta osservare che

$$\nexists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \frac{1}{\bar{n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \frac{1}{\bar{n}} = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \frac{1}{n} \neq 0\,.$$

Inoltre, per convincersi che sia aderente all'insieme, consideriamo un qualunque numero reale $r > 0$; sia U l'intorno $I_r(0)$, ossia

$$U = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| < r\}\,.$$

Affinché esista un numero $x \in T$ appartenente anche a U, deve esistere un numero intero $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < r$; poché entrambe le quantità della disuguaglianza, perché questo sia vero, basta che sia $n > \frac{1}{r}$, che è sempre vero qualunque sia $r > 0$, grazie alla proprietà di Archimede applicata al numero reale $1/r$.

Definizione 1.7. *Diciamo che $\boldsymbol{x}_0$ è un* punto di accumulazione *di T se ogni intorno di $\boldsymbol{x}_0$ contiene punti di T diversi da $\boldsymbol{x}_0$, ossia se*

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{x}_0},\, U \cap T \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \neq \emptyset\,.$$

I punti di accumulazione sono particolari punti aderenti. Per esempio, riferendoci all'insieme T dell'esempio 1.3, 0 è punto di accumulazione di T (mentre tutti i punti di T sono aderenti a T, ma non sono di accumulazione per T).

Definizione 1.8. *Diciamo che T è* denso *in M se ogni punto di M è aderente a T.*

Con questa definizione, resta vero che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (la semplice verifica è lasciata al lettore).

Definizione 1.9. *Sia $T \subseteq M$; la chiusura dell'insieme T è l'insieme $\overline{T}$ così definito:*

$$\overline{T} = \{\boldsymbol{x} \in M :\ \boldsymbol{x} \text{ è aderente a } T\}\,;$$

possiamo vedere la chiusura come un'operazione che agisce sugli insiemi T di uno spazio M e che gode delle seguenti proprietà:

$\mathcal{T}_1$) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{M} = M$;

$\mathcal{T}_2$) $\forall\, T \subseteq M\,,\ T \subseteq \overline{T}$;

$\mathcal{T}_3$) $\forall\, T \subseteq M\,,\ \overline{(\overline{T})}$;

$\mathcal{T}_4$) $\forall\, A, B \subseteq M\,,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$

(la dimostrazione delle proprietà enunciate viene omessa, poiché esula dagli ambiti del nostro corso; ciononostante, può costituire un ottimo esercizio per assimilare i concetti introdotti sino a qui, e viene suggerita ai lettori più esperti).Osserviamo che T è denso in M se e solo se la chiusura $\overline{T}$ coincide con M stesso.

Definizione 1.10. *Diciamo che $T \subseteq M$ è* chiuso *se coincide con la sua chiusura, ossia se $\overline{T} = T$, ossia se contiene tutti i suoi punti aderenti.*

Poiché, fra i punti aderenti, quelli che che potrebbero non essere in T sono quelli di accumulazione, possiamo anche dire che T è chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. In base alla definizione 1.10, M e $\emptyset$ sono chiusi.

Esempio 1.4. *L'intervallo $I = [1, 2]$ è chiuso.*

Per convincersi di questo, basta vedere che contiene tutti i suoi punti di accumulazione, ossia che non vi sono punti di accumulazione di I in $\mathcal{C}I$. In realtà, se prendiamo un punto $x_0 < 1$, esistono sicuramente suoi intorni $I_r(x_0)$ che non sono contenuti in I: basta prendere $r < (1 - x_0)/2$; quindi x_0 non è aderente a I. Analogamente, possiamo procedere se $x_0 > 2$, quindi la proprietà dell'esempio 1.4 risulta provata.

Definizione 1.11. *Diciamo che $A \subseteq M$ è aperto se il suo complementare in M è chiuso, ossia se $\overline{\mathcal{C}A} = \mathcal{C}A$.*

Si noti che la definizione di aperto *non* afferma che A sia aperto se non è chiuso; in altre parole, aperto e chiuso non sono concetti che si escludono a vicenda, e, infatti, $\emptyset$ e M sono *contemporaneamente* aperti e chiusi. Esistono, poi, insiemi che non sono né aperti, né chiusi: in $\mathbb{R}$ basta prendere un qualunque intervallo semiaperto $I = [a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, per avere un esempio di questa ultima situazione. Infatti, I non è chiuso, perche non contiene b, mentre $\mathcal{C}I$ non è chiuso per la mancanza di a.

Sarebbe possibile dimostrare il seguente

Teorema 1.1. *Un insieme $A \subseteq M$ è aperto se e solo se ogni suo punto ha almeno un intorno tutto contenuto in A, ossia se*

$$\forall\, x \in A\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{I}_x : U \subset A\,.$$

Inoltre, possiamo anche porre questa

Definizione 1.12. *Diremo che $\boldsymbol{x}_0$ è* interno *ad A se esiste un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ tutto contenuto in A,*

e, anche

Definizione 1.13. *L'insieme dei punti interni di A viene chiamato* parte interna *di A, e si indica con il simbolo $\overset{\circ}{A}$.*

Così facendo, si potrebbe mostrare che l'insieme $\overset{\circ}{A}$ dei punti interni di A è aperto.

Risulta abbastanza ovvia la seguente

Definizione 1.14. *Un punto $\boldsymbol{x}_0$ si dice* esterno *a T se è interno al complementare $\mathcal{C}T$.*

Infine, risulta utile anche la seguente

Definizione 1.15. *Un punto $\boldsymbol{x}_0$ si dice di* frontiera *per T se non è né interno né esterno a T; l'insieme dei punti di frontiera di T viene indicato con il sumbolo ∂T.*

Considerando l'insieme I dell'esempio 1.4, si ha $\partial I = \{1, 2\}$. Potremmo, inoltre, dimostrare che T è chiuso se $\partial T \subseteq T$ (la dimostrazione è lasciata come esercizio). Un'ultima osservazione: sia $M = \mathbb{R}$, e quindi $T \subseteq \mathbb{R}$. Se $T \neq \emptyset$ ed è limitato superiormente, ossia se $s = \sup T \in \mathbb{R}$, allora il fatto che s non sia il massimo di T implica che s sia un punto di accumulazione di T (e in modo analogo si potrebbe scrivere un enunciato per l'estremo inferiore).