

1 Successioni e serie numeriche

1.1 Serie a termini positivi

Teorema 1.1 Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ continua e non crescente in $[N, +\infty)$, con $N \in \mathbb{N}$, e sia detta $\{a_n\}$ la successione con $a_n := f(n)$; allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1}$$

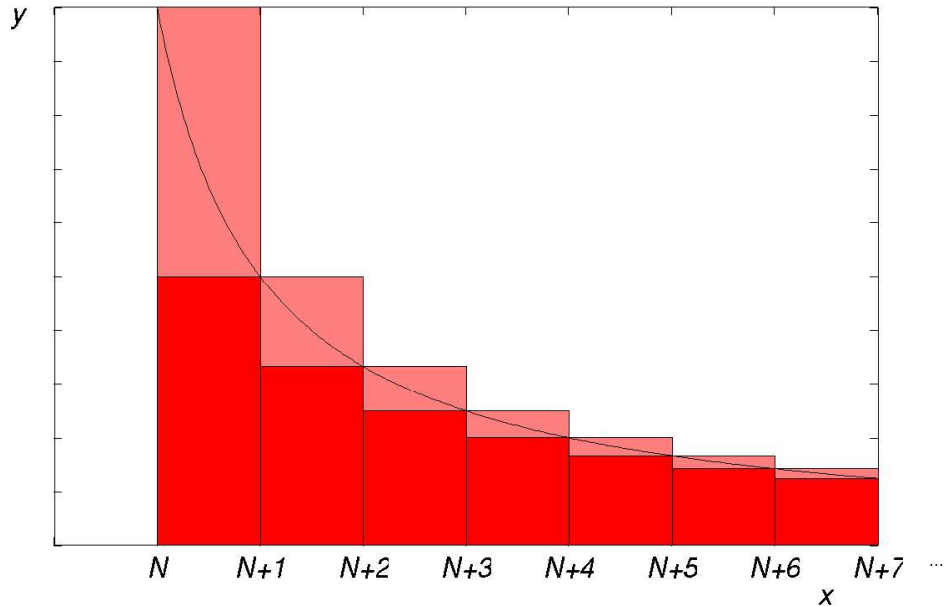
e l'integrale improprio

$$\int_N^{+\infty} f(t) dt \tag{2}$$

hanno comportamento analogo (ossia, se la serie converge, allora l'integrale converge, e viceversa; se la serie diverge, allora l'integrale diverge e viceversa).

Dimostrazione

Le proprietà della f sono riassunte nel grafico riportato nella figura sottostante.



Se fissiamo un $n \in \mathbb{N}$ tale che sia $n > N$, la somma parziale s_n della serie (1) diventa:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&= s_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \\
&= s_N + f(N+1) + f(N+2) + \cdots + f(n) \\
&\leq s_N + \int_N^n f(t) dt \\
&\leq s_N + \int_N^\infty f(t) dt,
\end{aligned} \tag{3}$$

dove s_N è la somma parziale N -esima della serie, costante; la rimanente parte si ottiene sommando le aree di rettangoli come quelli colorati di rosso scuro nella figura, fino a $x = n$, e questa approssima per difetto l'integrale definito grazie alla monotonia della funzione. La completezza dei numeri reali garantisce che il limite di tale integrale per $n \rightarrow \infty$ esista e sia l'integrale improprio, e l'ultima disuguaglianza rimane giustificata dal fatto che la f è positiva.

Osservando l'ultima disuguaglianza della (3), e prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$, notiamo subito che se la serie (1) diverge, anche l'integrale improprio (2) deve divergere. Viceversa, se l'integrale converge, la serie non può divergere, e quindi converge, essendo a termini positivi.

Viceversa, possiamo approssimare per eccesso l'integrale improprio tramite la somma delle aree dei rettangoli colorati di rosso chiaro nella figura. Supponiamo che la serie (1) converga a s ; in tale caso possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\int_N^\infty f(t) dt &\leq a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \\
&= s - s_{N-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

ossia l'integrale converge, perché $s - s_{N-1} < \infty$. Attraverso le disuguaglianze analoghe a quelle della (4) è semplice convincersi che, al contrario, se l'integrale diverge, anche la serie deve divergere, che conclude la dimostrazione.

Osserviamo, comunque, che il teorema *non* afferma che l'integrale improprio e la serie hanno la stessa somma.

1.2 Esempio 1

Possiamo ottenere grazie al teorema precedente il risultato noto per le p -serie. Sia, infatti, $p \geq 0$; sia, inoltre, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ per $x \geq 1$: notiamo che la funzione così definita risponde ai requisiti dell'ipotesi del teorema precedente 1.1, con $N = 1$. Possiamo dire quindi che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{5}$$

che è proprio una p -serie, e l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \tag{6}$$

hanno lo stesso comportamento.

Ora, è noto dal primo corso di Analisi l'integrale (6) converge (a $\frac{1}{1-p}$) se $p > 1$, e diverge a $+\infty$ se $p \leq 1$; ecco, quindi, immediatamente che, con $p \in \mathbb{N}$, la serie (5) converge se $p \geq 2$ e diverge se $p \leq 1$.

1.3 Esercizio

Mostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}, \quad (7)$$

converge se $q > 1$; diverge a $+\infty$ se $q \leq 1$ (si noti che, per la presenza del termine $\ln n$ a denominatore, occorre partire da $n = 2$ nella sommatoria).

Possiamo usare il teorema 1.1; per dedurre il comportamento dell'integrale improprio associato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q} dx; \quad (8)$$

per il calcolo, ricorriamo alla sostituzione $u = \ln x$, da cui $du = \frac{dx}{x}$. L'integrale (8) diventa

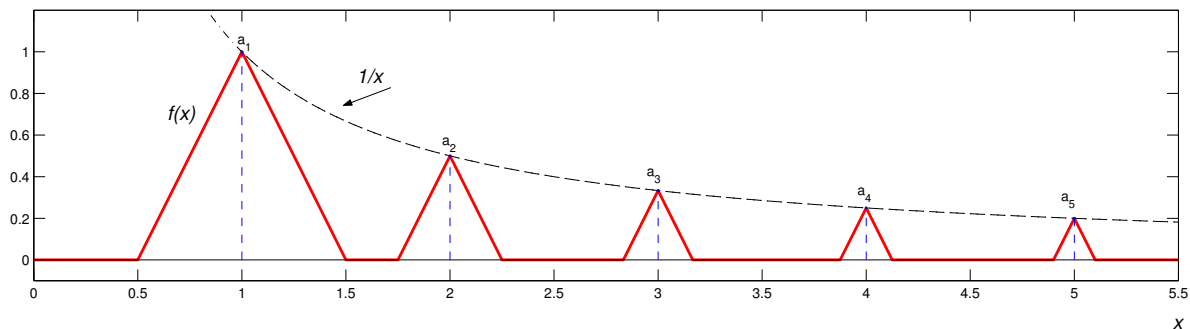
$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^q} du, \quad (9)$$

che converge se e solo se $q > 1$.

1.4 Esempio 2

Una delle ipotesi del teorema 1.1 è quella della monotonia della funzione $f(x)$. Vogliamo costruire un controesempio di come, violando questa condizione, la tesi non è più valida.

Sia $f(x)$ definita in \mathbb{R}^+ in modo che abbia valore nullo ovunque tranne che negli intervalli centrati sui valori interi di x , ossia per $x = n \in \mathbb{N} - \{0\}$; sia $1/n$ l'ampiezza di ogni intervallo, al variare di n e definiamo f in modo che varii linearmente fra 0 agli estremi dell'intervallo e $1/n$ al centro dello stesso. Per maggiore chiarezza, il grafico della funzione è parzialmente rappresentato in rosso nella figura sottostante.



Ora, è immediato osservare che, per come è stata definita la funzione $f(x)$, la serie associata ad essa ai sensi dell'enunciato del teorema 1.1 sarebbe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad (10)$$

che è la serie armonica, della quale è già stata mostrata la divergenza a $+\infty$; l'integrale improprio con la quale dovremmo confrontare la serie è, invece, esprimibile mediante la somma delle aree dei triangoli centrati in $x = n$, aventi base $1/n$ e altezza $1/n$. Risulta, pertanto:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}; \quad (11)$$

quindi, l'integrale converge, come possiamo vedere dalla (11), grazie al risultato sulle p -serie con $p = 2$.

Tutte le altre ipotesi sono verificate, a parte la monotonia della $f(x)$: è proprio questo che consente di ottenere un comportamento differente per la serie (10) e per l'integrale (11).