Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
11 giugno 2012

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2 *ore*** e **30 *minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. *Un corpo rigido piano è ottenuto a partire da una lamina quadrata omogenea $OABC$ di lato $AB = 5\ell$ e massa αm, asportando un quadrato $AEFD$ di lato $AE = \beta\ell$ (vedi figura). Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O, e con assi x ed y paralleli ad OA e OC, calcolare ($\alpha = (4,5,4)$, $\beta = (1,1,2)$):*

1. *La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato.*

$$x_G = (\frac{29}{12}, \frac{29}{12}, \frac{31}{14})\ell,$$
$$y_G = (\frac{31}{12}, \frac{31}{12}, \frac{39}{14})\ell$$

2. *Il momento di inerzia I_{OB} del corpo, rispetto all'asse OB.*

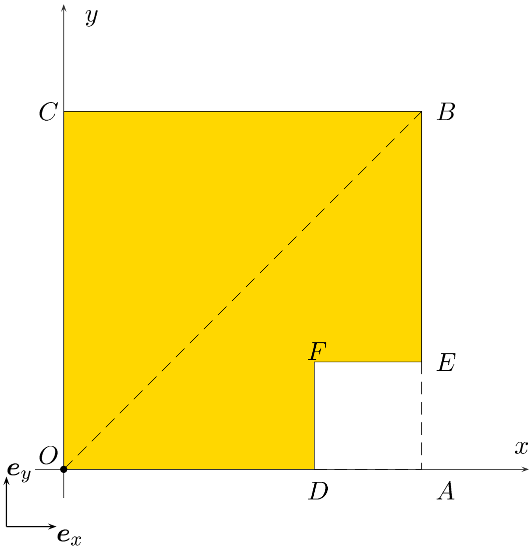
$$I_{OB} = (\frac{176}{25}, \frac{44}{5}, \frac{131}{5})m\ell^2$$

3. *La matrice di inerzia complessiva $[\mathbf{I}_O]$ del corpo rispetto al sistema assegnato.*

$$\begin{pmatrix} \frac{832}{25} & -\frac{616}{25} & 0 \\ -\frac{616}{25} & \frac{752}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1584}{25} \end{pmatrix} m\ell^2, \quad \begin{pmatrix} \frac{208}{5} & -\frac{154}{5} & 0 \\ -\frac{154}{5} & \frac{188}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{396}{5} \end{pmatrix} m\ell^2, \quad \begin{pmatrix} \frac{812}{25} & -\frac{561}{25} & 0 \\ -\frac{561}{25} & \frac{572}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1384}{25} \end{pmatrix} m\ell^2.$$

4. *Il momento centrale di inerzia I_G^z del corpo rispetto alla direzione ortogonale al piano.*

$$I_G^z = (\frac{1148}{75}, \frac{287}{15}, \frac{2242}{178})m\ell^2$$



2. *In un piano verticale, un'asta OA, di lunghezza ℓ e massa βm è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Un punto materiale P di massa αm è libero di muoversi lungo una guida orizzontale passante per O, ed è soggetto ad una forza di richiamo elastica verso O di costante $k = \frac{mg}{\ell}$, e ad una seconda forza di richiamo elastica verso l'estremo A, di constante $k = \gamma\frac{mg}{\ell}$. Usando come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che OA forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, e l'ascissa x di P misurata a partire da O (vedi figura), si determini ($\alpha = (3, 2, 1)$, $\gamma = (1, 2, 1)$):*

1. *l'energia cinetica $T(\vartheta, x, \dot{\vartheta}, \dot{x})$ del sistema;*

$$T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\beta m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

2. *il potenziale $U(\vartheta, x)$ del sistema;*

$$U(x, \vartheta) = \frac{1}{2}\beta mg\ell\cos\vartheta - (1, \frac{3}{2}, 1)\frac{mg}{\ell}x^2 + (1, 2, 1)mgx\ell\sin\vartheta$$

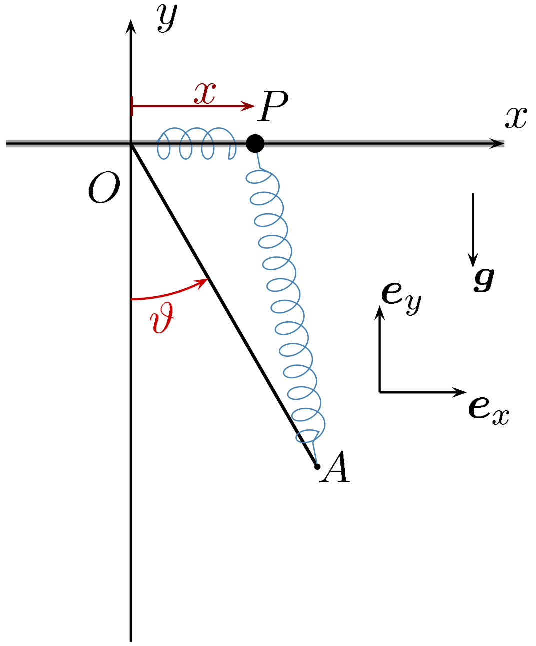
3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema;*

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0, \vartheta_1 = 0, \ \textit{stabile se } \beta > (1, \frac{8}{3}, 1);\\
&x_2 = 0, \vartheta_2 = \pi, \ \textit{sempre instabile;}\\
&x_3 = \pm l(\frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}, \frac{1}{12}\sqrt{64-9\beta^2}, \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2})\\
&\vartheta_3 = \pm\arccos((1, \frac{3}{8}, 1)\beta) \ \textit{esiste ed è stabile se } \beta < (1, \frac{8}{3}, 1)
\end{aligned}$$

4. *la qualificazione della stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di β;*

5. posto $\beta = (3,3,2)\,(> 2\frac{\gamma^2}{1+\gamma})$ *le equazioni del moto (equazioni di Lagrange);*

$$(3,2,1)\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}(2,3,2)x + (1,2,1)g\sin\vartheta$$
$$(1,1,\frac{2}{3})\ell^2\ddot{\vartheta} = -(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)mg\ell\sin\vartheta + (1,2,1)mgx\cos\vartheta$$



Domande

1. *Asse centrale per un sistema di vettori applicati.*

2. *L'ellissoide di inerzia.*