Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Civile ed Ambientale)
Appello dell'11 giugno 2012

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

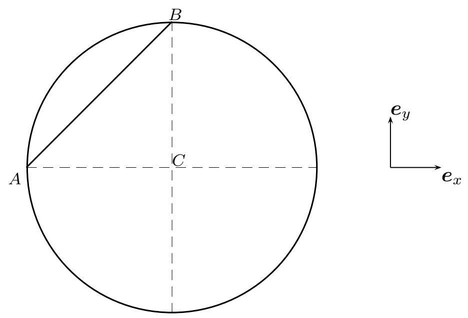
$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (0,3,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (-2,1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2,0,2) \end{cases}$$

determinarne risultante e momento risultante rispetto ad O, trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale.

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al punto O è $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 18\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante risulta $\mathcal{I} = -18$. Poiché $|\boldsymbol{R}|^2 = 44$ ed $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -48\boldsymbol{e}_x + 110\boldsymbol{e}_y + 34\boldsymbol{e}_z$, l'equazione dell'asse centrale è

$$\begin{cases} x = -\frac{12}{11} + 6\lambda \\ y = \frac{55}{22} + 2\lambda \\ z = \frac{17}{22} + 2\lambda\,. \end{cases}$$

2. *Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una circonferenza di raggio $2R$ e massa $3m$ un'asta AB di lunghezza $2R/\sqrt{2}$ e massa $9m$, disposta come in figura. Determinare la matrice di inerzia del corpo rispetto al punto A,*



individuandone gli autovalori e l'angolo che la base principale di inerzia forma rispetto alla base canonica $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$.

Il tensore di inerzia per l'anello in A si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner e vale

$$\mathbb{I}_A^{\text{an.}} = 6mR^2(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z) + 12mR^2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x)$$

mentre il tensore di inerzia per l'asta è

$$\mathbb{I}_A^{AB} = \frac{1}{3} 9m8R^2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) = 24mR^2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})$$

dove abbiamo osservato che A è estremo dell'asta mentre con $\boldsymbol{n}$ abbiamo indicato il versore diretto lungo $B - A$, inclinato di $\frac{\pi}{4}$ sull'orizzontale. Abbiamo allora

$$I_A^{xx} = \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_A^{\mathrm{an.}} \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_A^{AB} \boldsymbol{e}_x = 18mR^2,$$

$$I_A^{yy} = \boldsymbol{e}_y \cdot \mathbb{I}_A^{\mathrm{an.}} \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y \cdot \mathbb{I}_A^{AB} \boldsymbol{e}_y = 30mR^2,$$

e, per il teorema degli assi perpendicolari,

$$I_A^{zz} = I_A^{xx} + I_A^{yy} = 48mR^2.$$

Infine, l'elemento fuori diagonale è definito da

$$I_A^{xy} = \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_A^{\mathrm{an.}} \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_A^{AB} \boldsymbol{e}_y = -12mR^2$$

per cui la matrice di inerzia è

$$[I_A] = mR^2 \begin{pmatrix} 18 & -12 & 0 \\ -12 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}.$$

Detto α l'angolo non superiore a π che l'auvettore $\boldsymbol{e}_1$ forma con $\boldsymbol{e}_x$, sappiamo che deve essere

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_A^{xy}}{I_A^{xx} - I_A^{yy}} = 2,$$

per cui, essendo un angolo del primo quadrante, si ha

$$\sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

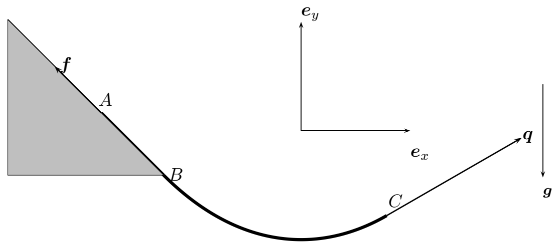
L'autovalore corrispondente alla direzione $\boldsymbol{e}_1$ è

$$I_1 = \frac{1}{2} I_A^{zz} + \frac{I_A^{xy}}{\sin 2\alpha} = mR^2(24 - 6\sqrt{5})$$

mentre lungo la direzione $\boldsymbol{e}_2$ l'autovalore è

$$I_2 = \frac{1}{2} I_A^{zz} - \frac{I_A^{xy}}{\sin 2\alpha} = mR^2(24 + 6\sqrt{5}).$$

3. *In un piano verticale, un filo omogeneo AC di peso specifico costante $2p$ ha il tratto BC libero, mantenuto teso grazie ad una forza $\boldsymbol{q}$ di modulo $p\ell\sqrt{3}$, inclinata di $\pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il tratto AB di lunghezza 3ℓ è appoggiato ad un piano inclinato di $\pi/4$ rispetto all'orizzontale ed è tenuto teso grazie ad*



una forza $\boldsymbol{f}$ di modulo $\sqrt{2}p\ell$ applicata in A. Il piano inclinato è scabro ed il contatto con il filo è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ. Scrivere l'equazione del profilo libero BC rispetto ad assi ortogonali $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ centrati nel vertice del tratto BC; determinare i valori di μ compatibili con l'equilibrio; calcolare il dislivello tra i punti B e C.

Il modulo della tensione in C è pari all'intensità di $\boldsymbol{q}$, per cui la componente costante della tensione nella direzione orizzontale vale $\psi = 3p/2$. Visto il valore del peso specifico costante del filo, l'equazione della catenaria riferita agli assi indicati dal testo è

$$y(x) = \frac{3}{4}\ell\left[\cosh\left(\frac{4x}{3\ell}\right) - 1\right].$$

Il valore della tensione in B, dove la tangente alla catenaria è inclinata di $\pi/4$ sull'orizzontale, vale

$$\tau_B = \psi\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}p.$$

Passiamo a considerare il tratto AB, dove valgono le equazioni di equilibrio indefinite

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + \phi_t + f_t = 0 \\ c\tau + \phi_n + f_n = 0 \end{cases}$$

dove $c = 0$ è la curvatura del supporto AB, ϕ_t e f_t sono le componenti della reazione vincolare e della forza attiva per unità di lunghezza nella direzione tangente al filo che assumiamo positiva nel verso che va da A a B. Infine, ϕ_n e f_n sono le componenti della reazione vincolare e della forza attiva per unità di lunghezza nella direzione del piano, ortogonale al filo (non è a stretto rigore la normale principale che non è definita per segmenti di retta dove $c = 0$): per fissare le idee, consideriamo positiva questa direzione se è entrante al piano inclinato. Con queste convenzioni, il peso specifico $-2p\boldsymbol{e}_y$ ha componenti

$$f_t = f_n = p\sqrt{2}.$$

La condizione di equilibrio di Coulomb e Morin $|\phi_t| \leq \mu|\phi_n|$ diventa

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + p\sqrt{2}\right| \leq \mu p\sqrt{2}$$

da cui si ottengono le condizioni

$$-p\sqrt{2}(\mu + 1) \leq \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \leq (\mu - 1)p\sqrt{2}$$

che, integrate da A a B forniscono, siccome $\tau_A = \sqrt{2}p\ell$

$$-3p\ell\sqrt{2}(\mu+1) \le \tau_B - \tau_A = \frac{1}{2}\sqrt{2}p\ell \le 3\ell(\mu-1)p\sqrt{2}$$

da cui si ottiene la condizione

$$\mu \ge \frac{7}{6}$$

che è un valore di difficile realizzazione pratica. Per trovare il dislivello, torniamo all'equazione del profilo della catenaria da cui otteniamo

$$\Delta y = y(x_B) - y(x_C) = \frac{3}{4}\ell\left[\cosh\left(\frac{4x_B}{3\ell}\right) - \cosh\left(\frac{4x_C}{3\ell}\right)\right].$$

Osserviamo che

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{4x}{3\ell}\right)$$

e che, vista la geometria dell'arco BC, si ha

$$y'(x_B) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1 \qquad y'(x_C) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui

$$\sinh\left(\frac{4x_B}{3\ell}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad \sinh\left(\frac{4x_C}{3\ell}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}:$$

usando la relazione fondamentale $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ otteniamo

$$\Delta y = y(x_B) - y(x_C) = \frac{3}{4}\ell\left[\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$