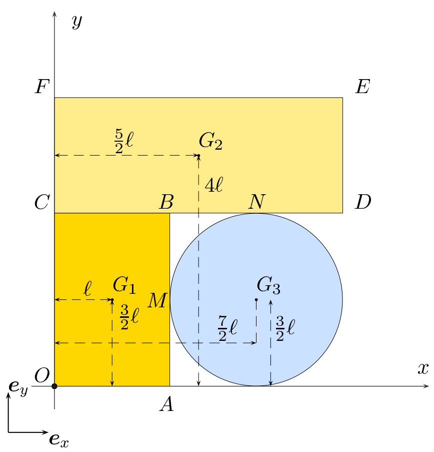
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
11 luglio 2012

SOLUZIONI

Esercizio 1. *Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una lamina rettagolare omogenea $OABC$ di lati $OA = 2\ell$ e $AB = 3\ell$, e massa $2m$, una lamina rettagolare omogenea $CDEF$ di lati $CD = 5\ell$ e $CF = 2\ell$, e massa m, in modo che il vertice B cada in CD, e un disco $\mathcal{D}$ omogeneo di massa $2m$, tangente esternamente nei punti medi M ed N dei segmenti AB e BD, rispettivamente. Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O, e con assi x ed y paralleli ad OA e OC, calcolare:*

(1) *La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato.*
(2) *I momenti di inerzia I_{yy}^{OABC}, I_{yy}^{CDEF} e $I_{yy}^{\mathcal{D}}$ rispetto all'asse y delle tre lamine, separatamente.*
(3) *I momenti di inerzia I_{xx}^{OABC}, I_{xx}^{CDEF} e $I_{xx}^{\mathcal{D}}$ rispetto all'asse x delle tre lamine, separatamente.*
(4) *La matrice di inerzia* complessiva $[\mathbf{I}_O]$ *del corpo rispetto al sistema assegnato.*
(5) *Il momento centrale di inerzia I_G^{zz} del corpo rispetto alla direzione ortogonale al piano.*



Risoluzione. Punto 1. Le caratteristiche di inerzia (centro di massa/baricentro e tensore centrale) per le tre lamine separatamente sono note. Per trovare il baricentro (centro di massa) del corpo piano complessivo, basta applicare opportunamente il teorema di composizione per i centri di massa (proprietà distributiva). Indicando con m_i le masse delle tre lamine e con G_i le coordinate dei loro centri di massa ($i = 1 \dots 3$, usando l'indice 1 per $OABC$, 2 per $CDEF$ e 3 per $\mathcal{D}$), abbiamo

$$M - O = \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O) + m_3(G_3 - O)}{m_1 + m_2 + m_3}\,, \tag{1}$$

ossia:

$$x_G = \frac{m_1 x_{G_1} + m_2 x_{G_2} + m_3 x_{G_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2m\,\ell + 2m\,5\ell/2 + 4m\,7\ell/2}{8m} = \frac{23}{10}\ell \tag{2a}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2} + m_3 y_{G_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2m\,3\ell/2 + 2m\,4\ell + 4m\,3\ell/2}{8m} = 2\ell \tag{2b}$$

$$z_G = 0 \tag{2c}$$

Punto 2. Per le lamine rettangolari $OABC$ e $CDEF$ l'asse Oy passa per un lato del rettangolo, quindi:

$$I_y^{(1)} = I_{yy}^{OABC} = \frac{1}{3} m_1 (\overline{OA})^2 = \frac{1}{3} 2m (2\ell)^2 = \frac{8}{3} m\ell^2 \,, \tag{3a}$$

$$I_y^{(2)} = I_{yy}^{CDEF} = \frac{1}{3} m_2 (\overline{CD})^2 = \frac{1}{3} 2m (5\ell)^2 = \frac{25}{3} m\ell^2 \,; \tag{3b}$$

per il disco di raggio $R = (3/2)\ell$, basta applicare correttamente la formula di Huygens-Steiner, dopo avere osservato l'asse Oy è parallelo ad un asse centrale di inerzia, e che la distanza fra essi è $d = d_3 = \frac{3}{2}\ell$:

$$I_y^{(3)} = I_{yy}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{4} m_3 (\frac{3}{2}\ell)^2 + m_3 d_3^2 = (\frac{1}{\cancel{4}} \cancel{4} m \frac{9}{4}\ell^2 + 4m \frac{9}{4}\ell^2 = \frac{205}{8} m\ell^2 \,. \tag{4}$$

Punto 3. Si procede come per il punto 2, usando la formula di Huygens-Steiner correttamente per i casi 2 e 3:

$$I_x^{(1)} = I_{xx}^{OABC} = \frac{1}{2} m_1 (\overline{AB})^2 + m_1 (\frac{3}{2}\ell)^2 = 6m\ell^2 \,, \tag{5a}$$

$$I_x^{(2)} = I_{xx}^{CDEF} = \frac{1}{12} m_2 (\overline{CD})^2 + m_2 (4\ell)^2 = \frac{49}{3} m\ell^2 \,, \tag{5b}$$

$$I_x^{(3)} = I_{xx}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{4} m_3 (\frac{3}{2}\ell)^2 + m_3 (\frac{7}{2}\ell)^2 = (\frac{1}{\cancel{4}} \cancel{4} m \frac{9}{4}\ell^2 + 4m \frac{49}{4}\ell^2 = \frac{45}{8} m\ell^2 \,. \tag{5c}$$

Punto 4. Per ogni lamina scriviamo il tensore di inerzia in O a partire da quello centrale, usando il teorema di Huygens-Steiner:

$$\mathbf{I}_O^{(i)} = \mathbf{I}_{G_i}^{(i)} + m_i (\overline{G_i O})^2 \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \right) \,, \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{e}_i$ indica un versore diretto come $G_i O$.

Poiché gli assi Ox ed Oy sono, in tutti e tre i casi, paralleli ad assi principali per i tre tensori centrali, a conti fatti il contributo di ciascuna lamina per il termine diagonale ha la forma

$$[\mathbf{I}_O^{(i)}]_{xy} = -m_i x_{G_i} y_{G_i} \,. \tag{7}$$

Otteniamo:

$$[\mathbf{I}_O]_{xy} = -(2m x_{G_1} y_{G_1} + 2m x_{G_2} y_{G_2} + 4m x_{G_3} y_{G_3}) = -\frac{47}{2} m\ell^2 \,. \tag{8}$$

Inoltre, per i primi due termini diagonali basta sommare i contributi corrispondenti già calcolati ai punti 2 e 3:

$$[\mathbf{I}_O]_{xx} = I_{xx}^{OABC} + I_{xx}^{CDEF} + I_{xx}^{\mathcal{D}} = \frac{671}{24} m\ell^2 \,, \tag{9a}$$

$$[\mathbf{I}_O]_{yy} = I_{yy}^{OABC} + I_{yy}^{CDEF} + I_{yy}^{\mathcal{D}} = \frac{293}{8} m\ell^2 \,; \tag{9b}$$

il terzo termine sulla diagonale si ottiene sommando i due precedenti delle equazioni 9:

$$[\mathbf{I}_O]_{zz} = [\mathbf{I}_O]_{xx} + [\mathbf{I}_O]_{yy} = \frac{775}{12} m\ell^2 \,. \tag{10}$$

Riassumendo:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} \frac{671}{24} & -\frac{47}{2} & 0 \\ -\frac{47}{2} & \frac{293}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{775}{12} \end{pmatrix} m\ell^2 \,. \tag{11}$$

Punto 5. Avendo il termine corrispondente della matrice di inerzia calcolato in O dal punto 4, possiamo ricavare il momento di inerzia centrale semplicemente applicando la formula di Huygens-Steiner per tutto il corpo, ricordando che la direzione di $\boldsymbol{e}_z$ è ortogonale al piano delle lamine:

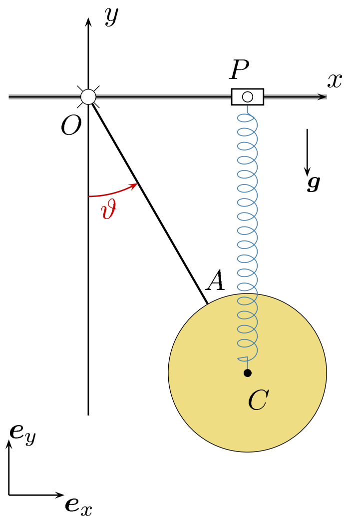
$$I_O^z = I_G^z + M(\overline{OG})^2 \,, \tag{12}$$

dove $M =_1 +m_2 + m_3 = 8m$ è la massa totale e la distanza $\overline{OG}$ si calcola facilmente conoscendo le coordinate di G dal punto 1. Risolvendo in I_G^z:

$$I_G^z = I_O^z - 8m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{272}{15} \ell^2 \,. \tag{13}$$

Esercizio 2. *In un piano verticale, un'asta OA, di lunghezza $3R$ e massa $2m$ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Un disco omogeneo di raggio R e massa $4m$ è saldato all'estremo A dell'asta, in modo che il suo centro C sia allineato con OA. Una forza di richiamo elastica, di constante $k = \gamma \frac{mg}{R}$, attrae C verso il punto P dell'asse orizzontale passante per O posto sulla verticale per C. Usando come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che OA forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, si determini:*

1. *l'energia cinetica $T(\vartheta, \dot\vartheta)$ del sistema;*
2. *il potenziale $U(\vartheta)$ del sistema;*
3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema*
4. *la qualificazione della stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di γ;*
5. posto $\gamma = 1$, *le frequenze normali delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.*



Risoluzione. Punto 1. Il sistema è costituito da un unico corpo rigido, composto di due parti saldate. La velocità angolare del corpo è

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \boldsymbol{e}_z \, . \tag{14}$$

Per calcolare l'energia cinetica, è sufficiente osservare che il punto O, che partecipa al moto rigido, è fisso; il teorema di König permette di scrivere

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_O^z \dot{\vartheta}^2 \, , \tag{15}$$

dove $\mathbf{I}_O$ è il tensore di inerzia del corpo calcolato in O e I_O^z è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto, passante per O; occorre calcolare esplicitamente quest'ultima quantità.

Il contributo dell'asta è determinato immediatamente:

$$I_O^{z\,(asta)} = \frac{1}{3}\, 2m\, (3R)^2 = 6m\, R^2 \, ; \tag{16}$$

per il disco, ricorriamo alla formula di Huygens-Steiner, essendo noto il momento centrale di inerzia di un disc omogeneo, rispetto ad una direzione ortogonale al disco:

$$I_O^{z\,(disco)} = \frac{1}{2}\, 4m\, R^2 + \left(4m\, (4R)^2\right) = 66\, m\, R^2 . \tag{17}$$

Otteniamo, quindi

$$I_O^z = I_O^{z\,(asta)} + I_O^{z\,(disco)} = 72\, m\, R^2 \, , \tag{18}$$

e, sostituendo nell'Eq. (15) otteniamo

$$T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = 36\, m\, R^2 \dot{\vartheta}^2 \, . \tag{19}$$

Punto 2.

Al potenziale totale contribuiscono un termine gravitazionale ed uno elastico; per il primo, basta scrivere il contributo di ciascuna delle due parti del corpo (asta, disco) separatamente, mentre per il secondo osserviamo che $\overline{CP} = 4R \cos\vartheta$:

$$\begin{aligned} U(\vartheta) &= -2mg\, y_G - 4mg\, y_C - \frac{1}{2} k \overline{CP}^2 = 2mg \frac{3R}{2} \cos\vartheta + 4m\, 4R \cos\vartheta - \frac{1}{2} k\, (4R\cos\vartheta)^2 \\ &= 19 mgR \cos\vartheta - 8\gamma mgR (\cos\vartheta)^2 \, , \end{aligned} \tag{20}$$

dove abbiamo omesso le costanti additive, inessenziali, ed abbiamo sfruttato il valore della costante elastica $k = \gamma \frac{mg}{R}$.

Punto 3. Non vi sono configurazioni limite da esaminare; la regolarità del potenziale consente di individuare tutte le configurazioni di equilibrio come quelle che annullano la derivata prima $U'(\vartheta)$, che garantiscono la stazionarietà del potenziale. Abbiamo

$$U'(\vartheta) = -mgR \sin\vartheta (19 - 16\gamma \cos\vartheta) = 0 \, , \tag{21}$$

che è soddisfatta quando $\sin\vartheta = 0$, ossia per

$$\vartheta_{1,\,2} = 0,\, \pi \, , \tag{22}$$

oppure per $19 - 16\gamma\cos\vartheta = 0$, che è risolta da

$$\vartheta_{3,\,4} = \pm \arccos \frac{19}{16\gamma} \, , \tag{23}$$

quando $\gamma \geq \frac{19}{16}$; tutti gli angoli delle configurazioni di equilibrio sono definiti a meno di multipli interi di 2π, inessenziali per individuare le configurazioni descritte.

Punto 4. La regolarità della funzione potenziale consente di caratterizzare la stabilità delle configurazioni di equilibrio dalla derivata seconda:

$$U''(\vartheta) = -mgR\left[19\cos\vartheta + 16\gamma(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right] = -mgR\left[19\cos\vartheta + 16\gamma(1 - 2\cos^2\vartheta)\right] \tag{24}$$

Per $\vartheta = \vartheta_1 = 0$ otteniamo:

$$U''(\vartheta_1) = -mgR\,[19 + 16\gamma(1-2)] = mgR(16\gamma - 19)\,, \tag{25}$$

la derivata (25) è negativa per $\gamma < 19/16$: in corrispondenza di questi valori di γ in ϑ_1 il potenziale $U(\vartheta)$ ha sicuramente un massimo isolato, quindi la configurazione è *stabile* in base al criterio di *Dirichlet-Lagrange*; se $\gamma > 19/16$, il potenziale $U(\vartheta)$ *non* ha un massimo isolato, quindi la configurazione è *instabile* in base al criterio di Liapunov[1].

Invece, per $\vartheta = \vartheta_2 = \pi$ otteniamo:

$$U''(\vartheta_2) = -mgR\,[-19 + 16\gamma(1-2)] = -mgR(16\gamma + 19)\,, \tag{26}$$

che è sempre negativo, quindi la configurazione è instabile in base al criterio di Liapunov per qualunque valore di γ .

Infine, per le configurazioni $\vartheta_{3,4}$, ossia per $\cos\vartheta = \frac{19}{16\gamma}$, presenti se $\gamma \geq 19/16$:

$$U''(\vartheta_{3,\,4}) = -mgR\left[19\frac{19}{16\gamma} + 16\gamma\left(1 - 2\left(\frac{19}{16\gamma}\right)^2\right)\right] = -mgR\frac{(16\gamma-19)^2}{16\gamma} \tag{27}$$

che è negativo, quindi le configurazioni sono *stabili* in base al criterio di *Dirichlet-Lagrange*, quando esistono[2].

Punto 5. Il sistema presenta un grado di libertà; le forze attive sono conservative. La funzione di Lagrange è, per $\gamma = 1$:

$$L(\vartheta, \dot\vartheta) = T(\vartheta, \dot\vartheta) + U(\vartheta) = 36\,m\,R^2\dot\vartheta^2 + 19mgR\cos\vartheta - 8mgR(\cos\vartheta)^2\,; \tag{28}$$

la configurazione di equilibrio stabile in questo caso è $\vartheta_1 = 0$.

Nell'intorno della configurazione di equilibrio, $\vartheta = 0 + \phi$, con $\phi \to 0$.

Dalla Eq. (28) si può scrivere subito l'equazione pura del moto (equazione di Lagrange):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\vartheta}\right) = 0\,, \tag{29}$$

ossia:

$$72mR^2\ddot\vartheta + 19mgR\sin\vartheta - 16mgR\cos\vartheta\sin\vartheta = 0 \tag{30}$$

che può essere linearizzata sviluppando in ϕ e trascurando termini di ordine superiore al primo:

$$72mR^2\ddot\phi + 3mgR\phi = 0\,, \tag{31}$$

da cui ricaviamo le pulsazioni per le piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{3mgR}{72mR^2}} = \sqrt{\frac{1}{24}}\sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{32}$$

Sinteticamente, seguendo la teoria dei modi normali:

$$A = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial\dot\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} = 72mR^2 \qquad B = -\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} = 3mgR,\,, \tag{33}$$

e la pulsazione delle p.o. è la radice quadrata delle soluzioni in λ dell'equazione $\det(B - \lambda A) = 3mgR - \lambda 72mR^2 = 0$, ossia $\omega_0^2 = \frac{3mgR}{72mR^2} = \frac{g}{24R}$.

[1] Il valore discriminante $\gamma = 19/16$ richiederebbe un'analisi più dettagliata, che viene omessa

[2] Come sopra