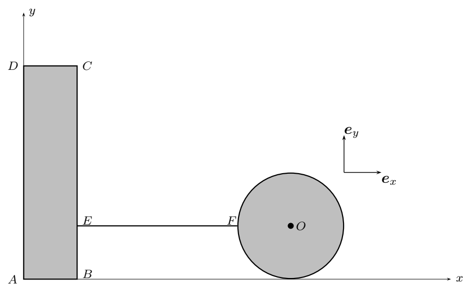
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Civile ed Ambientale)
Appello del 20 marzo 2012

1. *Un corpo rigido piano è ottenuto saldando un rettangolo $ABCD$, di massa $2m$, lati $AB = \ell$ e $AD = 4\ell$, un'asta EF di massa $3m$ e lunghezza 3ℓ, saldata in E ad un punto di BC ed in F ad un punto della periferia di un disco di massa $4m$ e raggio ℓ il cui centro O è allineato con E ed F. Si determinino:*



1. le coordinate del centro di massa G del corpo rigido rispetto al punto A;
2. i momenti di inerzia di $ABCD$, EF e del disco rispetto all'asse y;
3. la matrice di inerzia I_A del corpo rigido complessivo;
4. il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_z$.

Le coordinate rispetto ad A dei centri di massa G_1, G_2 e G_3 del rettangolo, dell'asta e del disco, rispettivamente, sono

$$G_1 - A \equiv \left(\frac{\ell}{2}, 2\ell\right) \qquad G_2 - A \equiv \left(\frac{5}{2}\ell, \ell\right) \qquad G_3 - A \equiv (5\ell, \ell)$$

per cui, dalla proprietà distributiva del centro di massa, otteniamo

$$x_G = \frac{m\ell + \frac{15}{2}m\ell + 20m\ell}{9m} = \frac{19}{6}\ell \qquad y_G = \frac{4m\ell + 3m\ell + 4m\ell}{9m} = \frac{11}{9}\ell.$$

Grazie al teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia di $ABCD$ rispetto all'asse y è $\frac{2}{3}m\ell^2$, quello di EF è $21m\ell^2$ mentre quello del disco è $101m\ell^2$: se sommiamo i risultati appena ottenuti abbiamo

$$I_{yy} = \frac{368}{3}m\ell^2.$$

Per trovare l'elemento di matrice I_{xx} occorre calcolare il momento di inerzia dell'intera figura rispetto all'asse x. Come prima, si adopera ancora il teorema di Huygens-Steiner ottenendo $\frac{32}{3}m\ell^2$ per il momento di inerzia del rettangolo; $3m\ell^2$ per quello dell'asta e $5m\ell^2$ per quello del disco, cosicché in definitiva si ha

$$I_{xx} = \frac{56}{3}m\ell^2.$$

Grazie al teorema degli assi perpendicolari si ha poi

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{424}{3}m\ell^2.$$

Infine, siccome i tensori centrali di inerzia di ciascuno dei corpi rigidi sono diagonali nella base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$, il termine della matrice di inerzia I_A fuori diagonale si ottiene dalla formula

$$I_{xy} = -2mx_{G_1}y_{G_1} - 3mx_{G_2}y_{G_2} - 4mx_{G_3}y_{G_3} = -\frac{59}{2}m\ell^2.$$

Il calcolo del momento centrale di inerzia $I_{G,\boldsymbol{e}_z}$ nella direzione $\boldsymbol{e}_z$ si effettua grazie al teorema di Huygens-Steiner ed alla conoscenza del momento di inerzia I_{zz} in A, appena trovato. Abbiamo

$$I_{G,\boldsymbol{e}_z} + 9m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{424}{3}m\ell^2$$

da cui si ricava

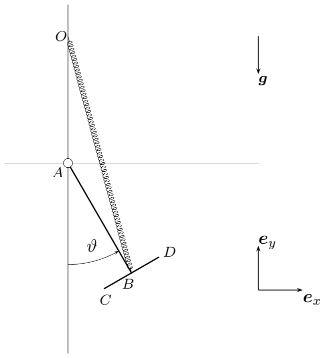
$$I_{G,\boldsymbol{e}_z} = \left(\frac{424}{3} - \frac{3733}{36}\right)m\ell^2 = \frac{1355}{36}m\ell^2.$$

2. *In un piano verticale, un'asta rigida a forma di T ha un braccio AB di lunghezza 2ℓ, massa $2m$ e l'estremo A incernierato ad un punto fisso mentre il braccio CD di lunghezza ℓ è saldato ortogonalmente ad AB nel suo punto medio ed ha massa $4m$. Il punto B è richiamato da una forza elastica di costante $k = \frac{\gamma mg}{\ell}$ verso un punto O fisso, posto sulla verticale per A, a distanza 2ℓ da A. Introdotto l'angolo ϑ indicato in figura si determinino: l'energia cinetica del sistema; il potenziale del sistema; i valori di ϑ nelle configuazioni di equilibrio; la stabilità delle configurazioni di equilibrio, al variare di γ. Posto $\gamma = 2$, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.*

Le due aste formano un unico corpo rigido dotato di punto fisso A per cui l'energia cinetica del sistema, che ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$, è

$$T = \frac{1}{2}I_{A,\boldsymbol{e}_z}\dot{\vartheta}^2$$

dove $I_{A,\boldsymbol{e}_z}$ è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per A e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$. Il punto A è un estremo di AB per cui il contributo di questo braccio al momento di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_z$ vale $\frac{8}{3}m\ell^2$. Applicando il teorema di



Huygens-Steiner all'altro braccio CD, il cui punto medio ha distanza 2ℓ da A, otteniamo $\frac{49}{3}m\ell^2$ come contributo di questo braccio al momento di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_z$ per cui, in definitiva, $I_{A,\boldsymbol{e}_z} = 19m\ell^2$ e l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{19}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Il potenziale U del sistema consta del contributo della forza elastica e di quelli della forza peso, agente su ciascun braccio dell'asta. Nel primo caso, il potenziale elastico vale $-\frac{\gamma mg}{2\ell}OB^2$ ovvero, usando il teorema di Carnot applicato al triangolo AOB, $-4\gamma mg\ell(1+\cos\vartheta)$. Il potenziale gravitazionale consta dei contributi per le due aste separatamente che valgono

$$2mg\ell\cos\vartheta + 8mg\ell\cos\vartheta = 10mg\ell\cos\vartheta$$

ed il potenziale totale è pertanto

$$U(\vartheta) = 10mg\ell\cos\vartheta - 4\gamma mg\ell(1+\cos\vartheta).$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio ordinarie consideriamo l'equazione $U'(\vartheta) = 0$, cioè

$$mg\ell(4\gamma - 10)\sin\vartheta = 0$$

che ammette le soluzioni $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, quando $\gamma \neq \frac{5}{2}$. Per determinarne la stabilità al variare di γ, calcoliamo la derivata seconda del potenziale

$$U''(\vartheta) = mg\ell(4\gamma - 10)\cos\vartheta$$

da cui si vede che $U''(0) = mg\ell(4\gamma-10) < 0$ per $\gamma < \frac{5}{2}$, mentre $U''(\pi) = mg\ell(10-4\gamma) < 0$ per $\gamma > \frac{5}{2}$ per cui la configurazione di equilibrio $\vartheta = 0$ è stabile per $\gamma < \frac{5}{2}$, mentre la configurazione $\vartheta = \pi$ è stabile per $\gamma > \frac{5}{2}$. Per completezza osserviamo che, quando $\gamma = \frac{5}{2}$, il potenziale è costante e dunque tutte le configurazioni di equilibrio sono instabili (Teorema di Hagedorn-Taliaferro) . Quando $\gamma = 2$, la configurazione di equilibrio stabile è $\vartheta = 0$ e si ha

$$B = U''(0) = -2mg\ell$$

mentre

$$A = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2}\right|_{\vartheta=0} = 19 m\ell^2$$

per cui la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{B}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{19\ell}}.$$