

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
22 febbraio 2013

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

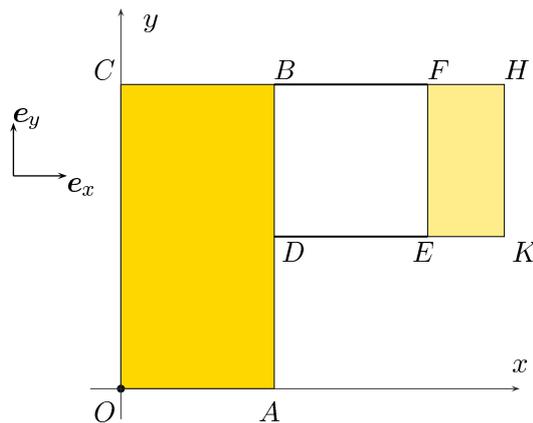
NOME

La *prova* consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

**Esercizi**

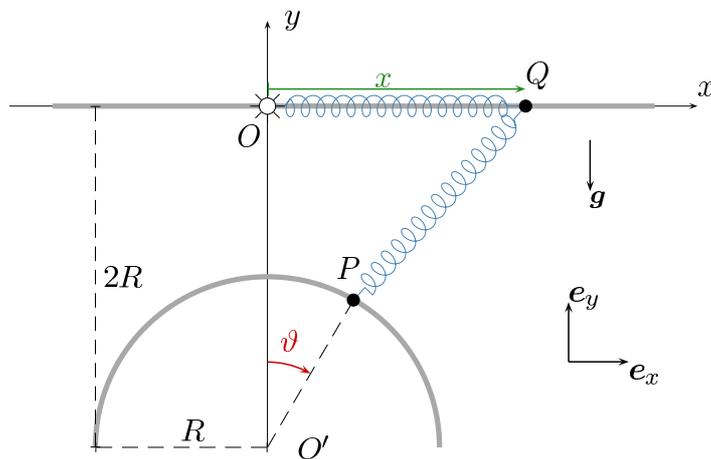
1. Un corpo rigido piano è ottenuto unendo ad una lamina rettangolare omogenea  $OABC$  di lati  $OA = 2\ell$  e  $AB = 4\ell$ , e massa  $4m$ , una lamina rettangolare omogenea  $EFHK$  di lati  $EF = 2\ell$  e  $FK = \ell$ , e massa  $m$ , mediante due aste omogenee  $BF$  e  $DE$ , di lunghezza  $2\ell$  e massa  $2m$  ciascuna, saldate ortogonalmente ai lati dei rettangoli. Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in  $O$ , e con assi  $x$  ed  $y$  paralleli ad  $OA$  e  $OC$ , calcolare:

1. La posizione del baricentro  $G$  del corpo nel riferimento assegnato.
2. I momenti di inerzia  $I_{yy}^{OABC}$ ,  $I_{yy}^{EFDK}$ ,  $I_{yy}^{BF}$  e  $I_{yy}^{DE}$  rispetto all'asse  $y$  delle parti, separatamente.
3. I momenti di inerzia  $I_{xx}^{OABC}$ ,  $I_{xx}^{EFDK}$ ,  $I_{xx}^{BF}$  e  $I_{xx}^{DE}$  rispetto all'asse  $x$  delle parti, separatamente.
4. La matrice di inerzia complessiva  $[I_O]$  del corpo rispetto al sistema assegnato.
5. Il momento di inerzia  $I_G^{zz}$  complessivo del corpo rispetto alla retta passante per il baricentro  $G$  ortogonale al piano  $xy$ .



2. In un piano verticale, un punto materiale  $Q$  di massa  $2m$  può muoversi liberamente lungo una guida orizzontale passante per un punto  $O$ ; un secondo punto materiale  $P$  di massa  $3m$  è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida semicircolare fissa, di raggio  $R$ , con diametro orizzontale e centro  $O'$  posto verticalmente sotto  $O$  a distanza  $2R$  da esso. Una forza di richiamo elastica, di costante  $k = \frac{mg}{R}$  attrae  $Q$  verso  $O$ ; una seconda forza di richiamo elastica, di costante  $k_2 = \gamma \frac{mg}{R}$ , attrae  $Q$  verso  $P$ . Usando come coordinate lagrangiane l'angolo  $\vartheta$  che  $PO'$  forma con la verticale ascendente, contato positivamente in senso antiorario, e l'ascissa  $x$  di  $Q$  misurata da  $O$ , si determini:

1. l'energia cinetica  $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$  del sistema;
2. il potenziale  $U(x, \vartheta)$  del sistema;
3. la/e configurazioni di equilibrio del sistema;
4. la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di  $\gamma$ ;
5. le equazioni di Lagrange per  $\gamma = 3/2$ .



### Domande

1. Primo e secondo Teorema di Koenig.
2. Le equazioni di Lagrange.