Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
22 febbraio 2013

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

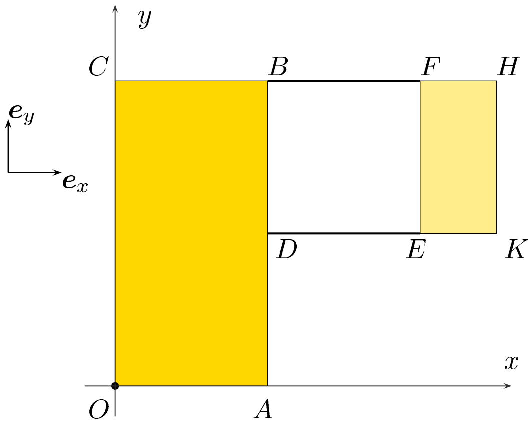
COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. *Un corpo rigido piano è ottenuto unendo ad una lamina rettangolare omogenea $OABC$ di lati $OA = 2\ell$ e $AB = 4\ell$, e massa $4m$, una lamina rettangolare omogenea $EFHK$ di lati $EF = 2\ell$ e $FK = \ell$, e massa m, mediante due aste omogenee BF e DE, di lunghezza 2ℓ e massa $2m$ ciascuna, saldate ortogonalmente ai lati dei rettangoli. Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O, e con assi x ed y paralleli ad OA e OC, calcolare:*

1. *La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato.*
$$(x_G, y_G) = \left(\frac{41}{18}\ell, \frac{23}{19}\ell\right)$$
2. *I momenti di inerzia I_{yy}^{OABC}, I_{yy}^{EFDK}, I_{yy}^{BF} e I_{yy}^{DE} rispetto all'asse y delle parti, separatamente.*
$$\frac{16}{3}m\ell^2,\ \frac{61}{3}m\ell^2,\ \frac{56}{3}m\ell^2,\ \frac{56}{3}m\ell^2.$$
3. *I momenti di inerzia I_{xx}^{OABC}, I_{xx}^{EFDK}, I_{xx}^{BF} e I_{xx}^{DE} rispetto all'asse x delle parti, separatamente.*
$$\frac{64}{3}m\ell^2,\ \frac{28}{3}m\ell^2,\ 8m\ell^2,\ 32m\ell^2.$$
4. *La matrice di inerzia complessiva $[\mathbf{I}_O]$ del corpo rispetto al sistema assegnato.*
$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{212}{3} & -\frac{115}{3} & 0 \\ -\frac{115}{3} & 63 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{401}{3} \end{pmatrix} m\ell^2$$
5. *Il momento di inerzia I_G^{zz} complessivo del corpo rispetto alla retta passante per il baricentro G ortogonale al piano xy.*
$$I_G^{zz} = \frac{1015}{36}m\ell^2.$$



2. *In un piano verticale, un punto materiale Q di massa $2m$ può muoversi liberamente lungo una guida orizzontale passante per un punto O; un secondo punto materiale P di massa $3m$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida semicircolare fissa, di raggio R, con diametro orizzontale e centro O' posto verticalmente sotto O a distanza $2R$ da esso. Una forza di richiamo elastica, di costante $k = \frac{mg}{R}$ attrae Q verso O; una seconda forza di richiamo elastica, di costante $k_2 = \gamma \frac{mg}{R}$, attrae Q verso P. Usando come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che PO' forma con la verticale ascendente, contato positivamente in senso antiorario, e l'ascissa x di Q misurata da O, si determini:*

1. *l'energia cinetica $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$ del sistema;*

$$T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} mR^2 \dot{\vartheta}^2$$

2. *il potenziale $U(x, \vartheta)$ del sistema;*

$$U(x, \vartheta) = -\frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 - \frac{1}{2}\gamma\frac{mg}{R}(x^2 - 2xR\sin\vartheta - 4R^2\cos\vartheta) - 3mgR\cos\vartheta$$

3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema;*

$$(\vartheta_1 = 0, x_1 = 0);$$

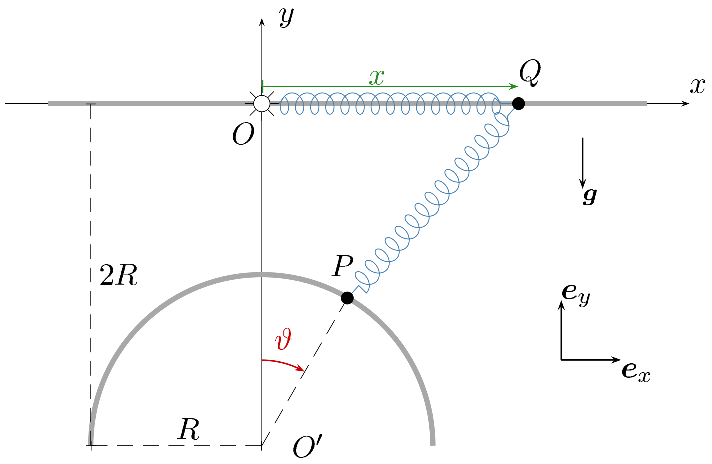
   inoltre, se

$$\gamma < \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \qquad (\vartheta_{2,3} = \pm \arccos\frac{(2\gamma - 3)(1+\gamma)}{\gamma^2}, x_{2,3} = \frac{\gamma}{1+\gamma} R \sin\vartheta_{2,3}).$$

4. *la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di γ; configurazione 1 stabile se $\gamma > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, configurazioni $2, 3$ stabile se $\gamma < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (ossia, quando esistono).*

5. *le equazioni di Lagrange per* $\gamma = 3/2$.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{g}{4R}(5x - 3R\sin\vartheta) \\ \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{2R^2} x\cos\vartheta \end{cases}$$



Domande

1. *Primo e secondo Teorema di Koenig.*
2. *Le equazioni di Lagrange.*