

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
28 gennaio 2013

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

La *prova* consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

**Esercizi**

1. Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una lamina rettangolare omogenea  $OABC$  di lati  $OA = 4\ell$  e  $AB = 2\ell$ , e massa  $3m$ , una lamina quadrata omogenea  $DBEF$  di lato  $2\ell$ , e massa  $2m$ , in modo che il vertice  $D$  cada in  $BC$ , e un disco  $\mathcal{D}$  omogeneo di raggio  $\ell$ , e massa  $4m$ , in modo che sia tangente a  $BC$  e  $DF$ . Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in  $O$ , e con assi  $x$  ed  $y$  paralleli ad  $OA$  e  $OC$ , calcolare:

1. La posizione del baricentro  $G$  del corpo nel riferimento assegnato.

$$(x_G, y_G) = \left( \frac{16}{9}\ell, \frac{7}{3}\ell \right).$$

2. I momenti di inerzia  $I_{yy}^{OABC}$ ,  $I_{yy}^{DBEF}$  e  $I_{yy}^{\mathcal{D}}$  rispetto all'asse  $y$  delle tre lamine, separatamente.

$$I_{yy}^{OABC} = 16m\ell^2, \quad I_{yy}^{DBEF} = \frac{56}{3}m\ell^2, \quad I_{yy}^{\mathcal{D}} = 5m\ell^2.$$

3. I momenti di inerzia  $I_{xx}^{OABC}$ ,  $I_{xx}^{DBEF}$  e  $I_{xx}^{\mathcal{D}}$  rispetto all'asse  $x$  delle tre lamine, separatamente.

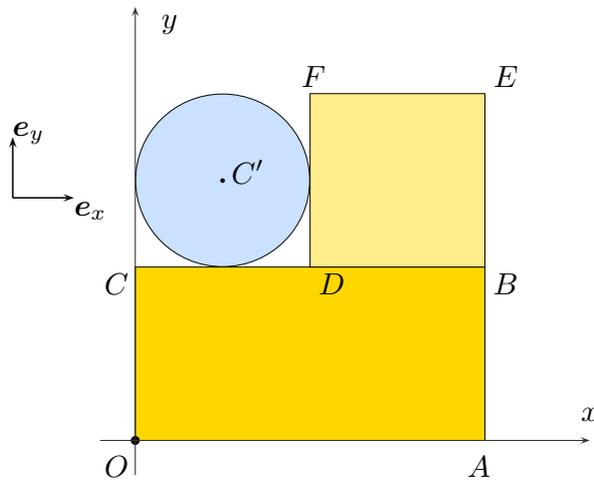
$$I_{xx}^{OABC} = 4m\ell^2, \quad I_{xx}^{DBEF} = \frac{56}{3}m\ell^2, \quad I_{xx}^{\mathcal{D}} = 37m\ell^2.$$

4. La matrice di inerzia complessiva  $[\mathbf{I}_O]$  del corpo rispetto al sistema assegnato.

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} \frac{179}{3}m\ell^2 & -36m\ell^2 & 0 \\ -36m\ell^2 & \frac{119}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{298}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

5. Il momento di inerzia  $I_G^{zz}$  complessivo del corpo rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il baricentro  $G$ .

$$I_G^{zz} = \frac{197}{9}m\ell^2.$$



2. In un piano verticale, un'asta  $OA$ , di lunghezza  $4\ell$  e massa  $3m$  è vincolata a ruotare attorno all'estremo  $O$ . Una lamina rettangolare omogenea di lati  $\overline{BC} = 2\ell$  e  $\overline{CD} = \ell$ , e massa  $4m$ , è saldata nel suo baricentro all'estremo  $A$  dell'asta, in modo che il lato  $BC$  sia ortogonale ad  $OA$ . Due forze di richiamo elastiche, di costante  $k_1 = \gamma \frac{mg}{\ell}$  e  $k_2 = 2 \frac{mg}{\ell}$ , rispettivamente, attraggono  $A$  verso due punti  $P_1 = (4\ell, 0)$  e  $P_2 = (-2\ell, 0)$  dell'asse orizzontale passante per  $O$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\vartheta$  che  $OA$  forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, si determini:

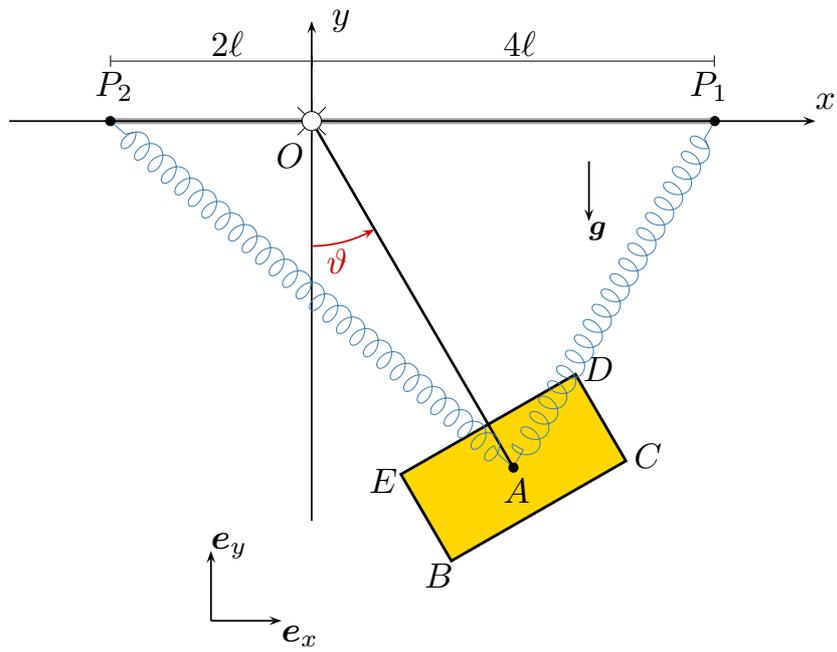
1. l'energia cinetica  $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$  del sistema;  $T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \frac{245}{3} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2$ .
2. il potenziale  $U(\vartheta)$  del sistema;  $U(\vartheta) = 22mgl \cos \vartheta + 16mgl(\gamma - 1) \sin \vartheta$ .
3. la/e configurazioni di equilibrio del sistema;  $\vartheta_1 = \arctan\left((\gamma - 1) \frac{8}{11}\right)$ ;  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$ .
4. la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate;

$$\vartheta_1: \text{stabile } \forall \gamma > 0; \quad \vartheta_2: \text{instabile } \forall \gamma > 0.$$

5. per quale valore di  $\gamma$  è possibile una configurazione di equilibrio con  $OA$  verticale;  $\gamma = 1$ .
6. la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione equilibrio stabile in corrispondenza del valore  $\gamma$  trovato al punto precedente.

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{66}{245}} \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

**Domande**



1. Definizione e proprietà della matrice di inerzia per un corpo rigido.
2. Composizione delle velocità nella cinematica relativa.