Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
28 gennaio 2013

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. *Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una lamina rettangolare omogenea $OABC$ di lati $OA = 4\ell$ e $AB = 2\ell$, e massa $3m$, una lamina quadrata omogenea $DBEF$ di lato 2ℓ, e massa $2m$, in modo che il vertice D cada in BC, e un disco $\mathcal{D}$ omogeneo di raggio ℓ, e massa $4m$, in modo che sia tangente a BC e DF. Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O, e con assi x ed y paralleli ad OA e OC, calcolare:*

1. *La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato.*

$$(x_G, y_G) = \left(\frac{15}{7}\ell, \frac{17}{7}\ell\right).$$

2. *I momenti di inerzia I_{yy}^{OABC}, I_{yy}^{DBEF} e $I_{yy}^{\mathcal{D}}$ rispetto all'asse y delle tre lamine, separatamente.*

$$I_{yy}^{OABC} = \frac{32}{3}m\ell^2, \quad I_{yy}^{DBEF} = 28m\ell^2, \quad I_{yy}^{\mathcal{D}} = \frac{5}{2}m\ell^2.$$

3. *I momenti di inerzia I_{xx}^{OABC}, I_{xx}^{DBEF} e $I_{xx}^{\mathcal{D}}$ rispetto all'asse x delle tre lamine, separatamente.*

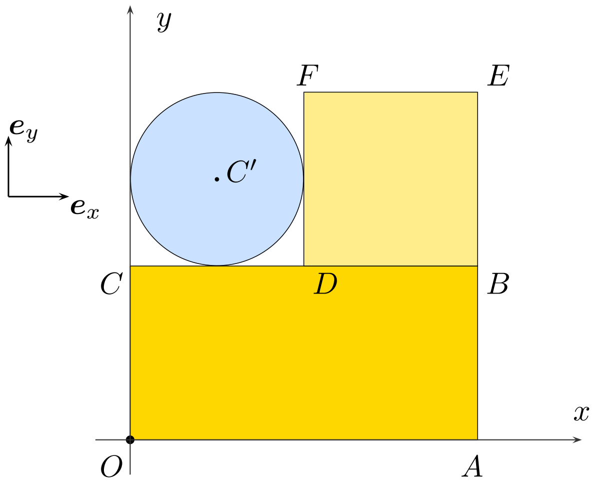
$$I_{xx}^{OABC} = \frac{8}{3}m\ell^2, \quad I_{xx}^{DBEF} = 28m\ell^2, \quad I_{xx}^{\mathcal{D}} = \frac{37}{2}m\ell^2.$$

4. *La matrice di inerzia* complessiva *$[\mathbf{I}_O]$ del corpo rispetto al sistema assegnato.*

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} \frac{295}{6}m\ell^2 & -37m\ell^2 & 0 \\ -37m\ell^2 & \frac{247}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{271}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

5. *Il momento di inerzia I_G^{zz} complessivo del corpo rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il baricentro G.*

$$I_G^{zz} = \frac{355}{21}m\ell^2.$$



2. *In un piano verticale, un'asta OA, di lunghezza 4ℓ e massa $2m$ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Una lamina rettangolare omogenea di lati $\overline{BC} = 2\ell$ e $\overline{CD} = \ell$, e massa $4m$, è saldata nel suo baricentro all'estremo A dell'asta, in modo che il lato BC sia ortogonale ad OA. Due forze di richiamo elastiche, di costante $k_1 = \gamma \frac{mg}{\ell}$ e $k_2 = 4\frac{mg}{\ell}$, rispettivamente, attraggono A verso due punto $P_1 = (4\ell, 0)$ e $P_2 = (-2\ell, 0)$ dell'asse orizzontale passante per O. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che OA forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, si determini:*

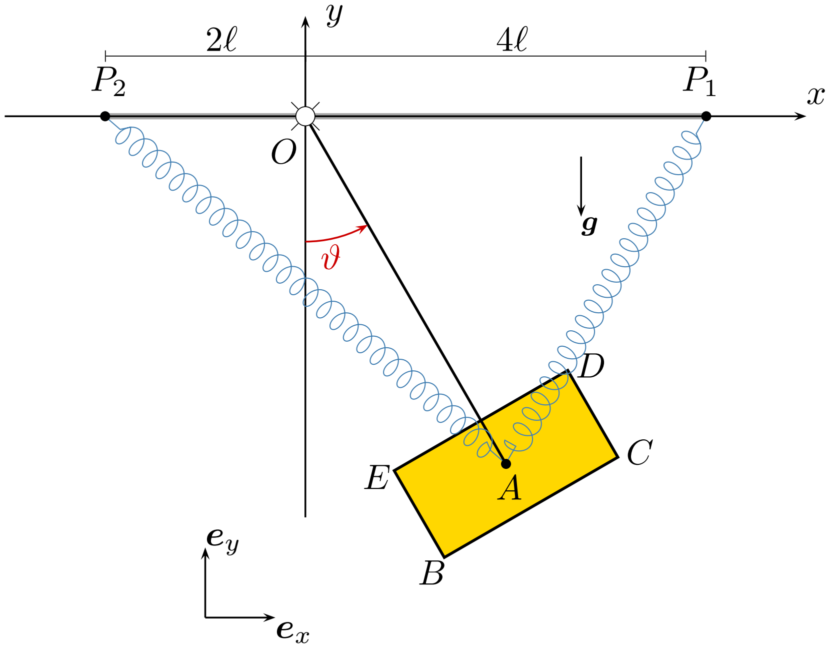
1. *l'energia cinetica $T(\vartheta, \dot\vartheta)$ del sistema;* $T(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{1}{2}\,\frac{229}{3} m\ell^2\,\dot\vartheta^2$.
2. *il potenziale $U(\vartheta)$ del sistema;* $U(\vartheta) = 20mg\ell\cos\vartheta + 16mg\ell(\gamma - 2)\sin\vartheta$.
3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema;* $\vartheta_1 = \arctan\left((\gamma-2)\frac{4}{5}\right)$; $\qquad \vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$.
4. *la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate;*

$$\vartheta_1: \ \textit{stabile}\ \forall\gamma > 0; \qquad \vartheta_2: \ \textit{instabile}\ \forall\gamma > 0.$$

5. *per quale valore di γ è possibile una configurazione di equilibrio con OA verticale;* $\gamma = 2$.
6. *la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione equilibrio stabile in corrispondenza del valore γ trovato al punto precedente.*

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{60}{229}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Domande



1. *Definizione e proprietà della matrice di inerzia per un corpo rigido.*
2. *Composizione delle velocità nella cinematica relativa.*