UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
Esame di Fisica Matematica
30 novembre 2012

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. *Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una lamina rettangolare omogenea $OABC$ di lati $OA = 2\ell$ e $AB = 4\ell$, e massa $4m$, una lamina quadrata omogenea $BDEF$ di lato 2ℓ, e massa $3m$, in modo che il vertice D cada in AB, e una lamina quadrata omogenea $OHLK$ di lato 2ℓ, e massa $2m$, in modo che il vertice H cada in OC. Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O, e con assi x ed y paralleli ad OA e OC, calcolare:*

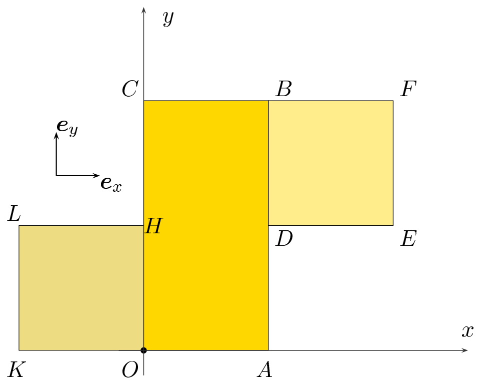
1. *La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato.* $(x_G, y_G) = (\frac{11}{9}\ell, \frac{19}{9}\ell)$
2. *I momenti di inerzia I_{yy}^{OABC}, I_{yy}^{BDEF} e I_{yy}^{OHLK} rispetto all'asse y delle tre lamine, separatamente.* $\frac{16}{3}m\ell^2$, $28m\ell^2$, $\frac{8}{3}m\ell^2$
3. *I momenti di inerzia I_{xx}^{OABC}, I_{xx}^{BDEF} e I_{xx}^{OHLK} rispetto all'asse x delle tre lamine, separatamente.* $\frac{64}{3}m\ell^2$, $28m\ell^2$, $\frac{8}{3}m\ell^2$
4. *La matrice di inerzia* complessiva $[\mathbf{I}_O]$ *del corpo rispetto al sistema assegnato.*

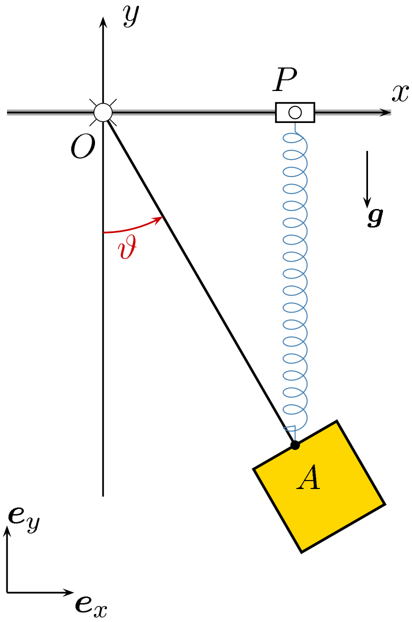
$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} 52 & -33 & 0 \\ -33 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 88 \end{pmatrix} m\ell^2$$

5. *Il momento centrale di inerzia I_G^{zz} del corpo rispetto alla direzione ortogonale al piano.* $\frac{310}{9}m\ell^2$

2. *In un piano verticale, un'asta OA, di lunghezza 4ℓ e massa $3m$ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa $4m$ è saldata all'estremo A dell'asta, nel punto medio di un suo lato, ortogonale ad OA. Una forza di richiamo elastica, di costante $k = \gamma\frac{mg}{\ell}$, attrae A verso il punto P dell'asse orizzontale passante per O, posto sulla verticale per A. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che OA forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, si determini:*

1. *l'energia cinetica $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$ del sistema;* $T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{293}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$
2. *il potenziale $U(\vartheta)$ del sistema;* $U(\vartheta) = mg\ell(24\cos\vartheta - 8\gamma\cos^2\vartheta)$





3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema;*

$$\vartheta_1 = 0;\ \vartheta_2 = \pi.\ \textit{Inoltre, se } \gamma \geq \frac{3}{2},\ \vartheta_{3,4} = \pm \arccos \frac{3}{2\gamma}.$$

4. *la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di γ;*

$$\vartheta_1 \textit{ stabile se } \gamma < \frac{3}{2}; \quad \vartheta_2 \textit{ instabile}; \quad \vartheta_{3,4} \textit{ stabile se } \gamma > \frac{3}{2} \textit{ (ossia se esiste).}$$

5. *l'equazione del moto di Lagrange.*

$$\frac{293}{3}\ddot{\vartheta} + 24\frac{g}{\ell}\sin\vartheta - 8\gamma\frac{g}{\ell}\sin(2\vartheta) = 0.$$

Domande

1. *La prima equazione cardinale della dinamica e il teorema del moto del baricentro.*
2. *Sistemi di vettori equipollenti (equivalenti).*