

UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
Esame di Fisica Matematica
30 novembre 2012

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

La *prova* consta di **2** esercizi e **2** domande, e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. Un corpo rigido piano è ottenuto saldando ad una lamina rettangolare omogenea $OABC$ di lati $OA = 2\ell$ e $AB = 4\ell$, e massa $3m$, una lamina quadrata omogenea $BDEF$ di lato 2ℓ , e massa $2m$, in modo che il vertice D cada in AB , e una lamina quadrata omogenea $OHLK$ di lato 2ℓ , e massa $4m$, in modo che il vertice H cada in OC . Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in O , e con assi x ed y paralleli ad OA e OC , calcolare:

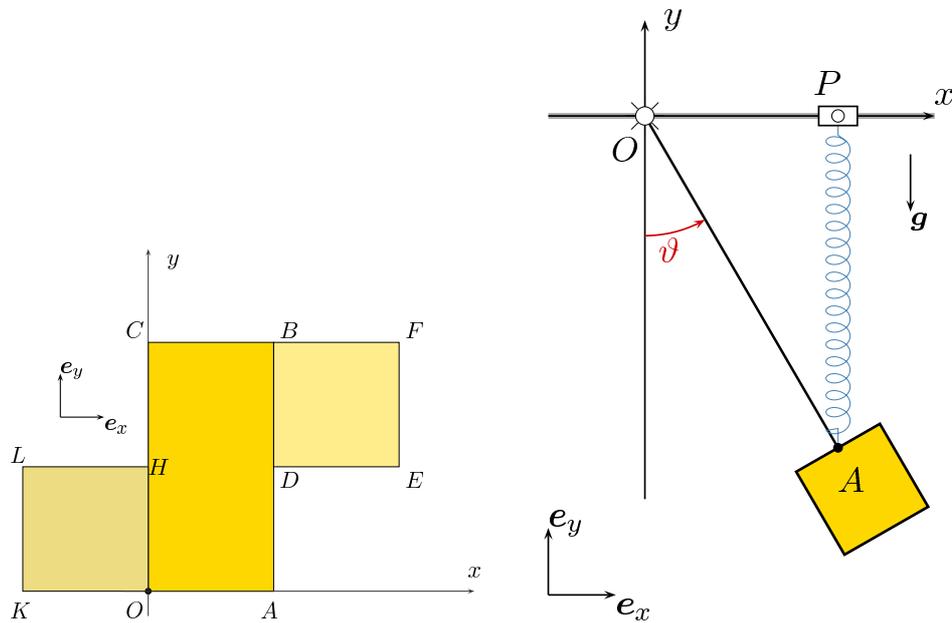
1. La posizione del baricentro G del corpo nel riferimento assegnato. $(x_G, y_G) = (\frac{5}{9}\ell, \frac{16}{9}\ell)$
2. I momenti di inerzia I_{yy}^{OABC} , I_{yy}^{BDEF} e I_{yy}^{OHLK} rispetto all'asse y delle tre lamine, separatamente.
 $4m\ell^2, \frac{56}{3}m\ell^2, \frac{16}{3}m\ell^2$
3. I momenti di inerzia I_{xx}^{OABC} , I_{xx}^{BDEF} e I_{xx}^{OHLK} rispetto all'asse x delle tre lamine, separatamente.
 $16m\ell^2, \frac{56}{3}m\ell^2, \frac{16}{3}m\ell^2$
4. La matrice di inerzia complessiva $[I_O]$ del corpo rispetto al sistema assegnato.

$$[I_O] = \begin{pmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 68 \end{pmatrix} m\ell^2$$

5. Il momento centrale di inerzia I_G^{zz} del corpo rispetto alla direzione ortogonale al piano. $\frac{331}{9}m\ell^2$

2. In un piano verticale, un'asta OA , di lunghezza 4ℓ e massa $4m$ è vincolata a ruotare attorno all'estremo O . Una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa $6m$ è saldata all'estremo A dell'asta, nel punto medio di un suo lato, ortogonale ad OA . Una forza di richiamo elastica, di costante $k = \gamma \frac{mg}{\ell}$, attrae A verso il punto P dell'asse orizzontale passante per O , posto sulla verticale per A . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che OA forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, si determini:

1. l'energia cinetica $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$ del sistema; $T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{863}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$
2. il potenziale $U(\vartheta)$ del sistema; $U(\vartheta) = mg\ell(35 \cos \vartheta - 8\gamma \cos^2 \vartheta)$



3. la/le configurazioni di equilibrio del sistema;

$$\vartheta_1 = 0; \vartheta_2 = \pi. \text{ Inoltre, se } \gamma \geq \frac{35}{16}, \vartheta_{3,4} = \pm \arccos \frac{35}{16\gamma}.$$

4. la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di γ ;

$$\vartheta_1 \text{ stabile se } \gamma < \frac{35}{16}; \quad \vartheta_2 \text{ instabile}; \quad \vartheta_{3,4} \text{ stabile se } \gamma > \frac{35}{16} \text{ (ossia se esiste).}$$

5. l'equazione del moto di Lagrange.

$$\frac{863}{6} \ddot{\vartheta} + 35 \frac{g}{\ell} \sin \vartheta - 8\gamma \frac{g}{\ell} \sin(2\vartheta) = 0.$$

Domande

1. La prima equazione cardinale della dinamica e il teorema del moto del baricentro.
2. Sistemi di vettori equipollenti (equivalenti).