

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Considerare il numero complesso $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = \frac{|z|}{\sqrt{2}}$, e $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$. Determinare

(a) $w = \sqrt{2}(1+i)$ (b) $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$ (c) $z^3w^2 = -64\sqrt{2}i$ (d) $\Re(w^3) = -4\sqrt{2}$

2. Si consideri l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy \\ hx + y \\ (h+1)y \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{e_1, e_2\}$ i vettori della base standard di \mathbb{R}^2 .

(a) Calcolare: $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$ $L(e_2) = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1+h \end{pmatrix}$

(b) Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi standard di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 :

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 1 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}$$

(c) Dire per quale/i valori di h l'applicazione è iniettiva: $h \neq -1$

(d) Posto $h = 1$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im } L$: $x - y = 0$

(e) Posto $h = -1$, determinare una base di $\text{Ker } L$: $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0, \mu_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2, \mu_2 = 3$$

(b) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A :
dimensioni (molteplicità geometriche): $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = z = t = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per ciascun autospazio di A :

$$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

(d) A è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. **NO: $\nu_2 = 2 \neq \mu_2 = 3$**

4. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h :

$$\begin{cases} x + hy + z + (h^2 - 1)t = h + 1 \\ y + z + t = 0 \\ x + hy + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 1$

(b) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione 2:
 $h = -1$

(c) Posto $h = 2$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z$ libero

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

- (b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}$: $\begin{cases} x + z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$
- (c) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s : **rette SGHEMBE**.
- (d) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A , B , e P : $\pi: x - 3y + 2z + 3 = 0$
- (e) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π : $\delta = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

6. Si consideri la forma quadratica reale $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4z^2.$$

- (a) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di \mathbb{R}^3 :

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (b) Scrivere l'equazione canonica di Q : $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2$.
- (c) Scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ z' = z \end{cases}$$

- (d) Stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita: **definita POSITIVA**.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

In \mathbb{R}^4 si considerino i seguenti vettori dipendenti da un parametro $h \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h^2 \\ h \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h^2 \\ -h \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$:

1. i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e \mathbf{v}_4 sono **linearmente indipendenti**:
2. il vettore \mathbf{v}_4 appartiene allo $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$: