CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Considerare il numero complesso $z = 2 + 2i$.

   Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = \dfrac{|z|}{2}$, e $\operatorname{Arg}(w) = -\dfrac{\pi}{6}$. Determinare

   (a) $w = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{4}$ (c) $z^2 w^3 = 16\sqrt{2}$ (d) $\Im(w^2) = -\sqrt{3}$

---

2. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (h-1)y \\ (h-1)x + y + hz \end{pmatrix},$$

   con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcolare: $L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ h-1 \end{pmatrix}$ $\quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$

   (b) Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 0 \\ h-1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

   (c) Dire per quale/i valori di h l'applicazione è suriettiva: $h \neq 0$

   (d) Posto $h = 0$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$: $x + y = 0$

   (e) Posto $h = 1$, determinare una base di $\operatorname{Ker} L$: $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2,\ \mu_2 = 3$$

(b) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A:
dimensioni (molteplicità geometriche): $\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 3$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x - y = x - z = x - t = 0 \right\}, V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per ciascun autospazio di A:

$$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_{-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

(d) A è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. SI': $\nu_1 = \mu_1 = 1$, $\nu_2 = \mu_2 = 3$, $\nu_1 + \nu_2 = 4$ (ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e sono tutti regolari).

---

4. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ x + ky + z + (k^2 - 1)t = k - 1 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di k il sistema non ammette soluzioni: $k = -1$

(b) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1: $k \neq \pm 1$

(c) Posto $k = 3$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, z libero

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\boldsymbol{d} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$: $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

(c) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s:
rette INCIDENTI ($r \cap s = P_0 = (2, 1, 0)$).

(d) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A, B, e P: $\pi\colon x + y - 3 = 0$

(e) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π: $\delta = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

---

6. Si consideri la forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 2z^2.$$

(a) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

(b) Scrivere l'equazione canonica di Q: $Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 6x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$.

(c) Scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ z' = z \end{cases}$$

(d) Stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita: definita POSITIVA.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri la seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e calcolare l'autovalore corrispondente.
2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, determinare una base ortogonale del sottospazio $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})^{\perp}$.
3. Verificare che U è un autospazio di A e calcolare l'autovalore corrispondente.