CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 febbraio 2010**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Considerare il numero complesso $z = 2 - 2i$.

   Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = \dfrac{|z|}{\sqrt{2}}$, e $\operatorname{Arg}(w) = \dfrac{\pi}{6}$. Determinare

   (a) $w = \sqrt{3} + i$ (b) $\operatorname{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{4}$ (c) $z^2 w^3 = 64$ (d) $\Im(w^2) = 2\sqrt{3}$

---

2. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h-1)x + y \\ x + (h-1)y + hz \end{pmatrix},$$

   con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcolare: $L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ h-1 \end{pmatrix}$ $\quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$

   (b) Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

$$A_L = \begin{pmatrix} h-1 & 1 & 0 \\ 1 & h-1 & h \end{pmatrix}$$

   (c) Dire per quale/i valori di h l'applicazione è suriettiva: $h \neq 0$

   (d) Posto $h = 0$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$: $x + y = 0$

   (e) Posto $h = 2$, determinare una base di $\operatorname{Ker} L$: $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -4,\ \mu_2 = 3$$

(b) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A:
dimensioni (molteplicità geometriche): $\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 3$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x - y = x - 2z = x - 2z = 0 \right\}, V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per ciascun autospazio di A:

$$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_{-4}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

(d) A è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. SI': $\nu_1 = \mu_1 = 1$, $\nu_2 = \mu_2 = 3$, $\nu_1 + \nu_2 = 4$ (ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e sono tutti regolari).

---

4. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + ky + z + (k^2 - 4)t = k + 2 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di k il sistema non ammette soluzioni: $k = 2$

(b) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1: $k \neq \pm 2$

(c) Posto $k = -3$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, z libero

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z - x = 2 \end{cases}$$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

(c) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s:
rette INCIDENTI ($r \cap s = P_0 = (-1, 2, 1)$).

(d) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A, B, e P: $\pi \colon y + z - 3 = 0$

(e) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π:

$\delta = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

---

6. Si consideri la forma quadratica reale $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3x^2 + 2\sqrt{3}xy - 5y^2 - 6z^2.$$

(a) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

.

(b) Scrivere l'equazione canonica di Q: $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -6x'^2 - 2y'^2 - 6z'^2$.

(c) Scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \\ z' = z \end{cases}$$

(d) Stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita: definita NEGATIVA.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino le seguenti matrici reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che le matrici A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
2. Le matrici sono simili? Giustificare la risposta.
3. Trovare, se esiste una matrice M invertibile di ordine 3 per cui $M^{-1}BM$ risulta diagonale. M può essere ortogonale?