CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Considerare il numero complesso $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

   Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = 2|z|$, e $\mathrm{Arg}(w) = -\dfrac{\pi}{4}$. Determinare

   (a) $w = 4(1-i)$ (b) $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3}$ (c) $z^3 w^2 = 512\sqrt{2}i$ (d) $\Re(w^3) = -128$

---

2. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + hy \\ hx + 2y \\ (h+2)y \end{pmatrix},$$

   con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ i vettori della base standard di $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcolare: $L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ h+2 \end{pmatrix}$

   (b) Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

$$A_L = \begin{pmatrix} 2 & h \\ h & 2 \\ 0 & h+2 \end{pmatrix}$$

   (c) Dire per quale/i valori di h l'applicazione è iniettiva: $h \neq -2$

   (d) Posto $h = 1$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\, L$: $x - 2y + z = 0$

   (e) Posto $h = -2$, determinare una base di $\mathrm{Ker}\, L$: $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = -1,\ \mu_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1,\ \mu_2 = 3$$

(b) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A:
dimensioni (molteplicità geometriche): $\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = z = t = 0 \right\}, V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per ciascun autospazio di A:

$$\mathcal{B}_{V_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

(d) A è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. NO: $\nu_2 = 2 \neq \mu_2 = 3$

---

4. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} x + hy + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x + hy + z + (h^2 - 9)t = h + 3 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 3$

(b) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione 2:
$h = -3$

(c) Posto $h = -2$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, z libero

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\boldsymbol{d} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$:

$$\begin{cases} z = 1 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

(c) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s: rette SGHEMBE.

(d) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A, B, e P: $\pi\colon 5x - 2y + 3z + 4 = 0$

(e) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π: $\delta = \dfrac{4}{\sqrt{38}}$.

---

6. Si consideri la forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 - 2xz + 3y^2 + 2z^2.$$

(a) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

(b) Scrivere l'equazione canonica di Q: $Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 3x'^2 + 3y'^2 + z'^2.$

(c) Scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - z) \\ y' = y \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + z) \end{cases}$$

(d) Stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita: definita POSITIVA.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 febbraio 2010**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori dipendenti da un parametro $h \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h^2+2h \\ h \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h^2+2h \\ -h-2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$:

1. lo spazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ ha dimensione 2:

2. lo spazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ ha dimensione 3: