

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Considerare il numero complesso $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = \sqrt{2}|z|$, e $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{6}$. Determinare

(a) $w = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i)$ (b) $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ (c) $z^2 w^3 = 64\sqrt{2}$ (d) $\Im(w^2) = -4\sqrt{3}$

2. Si consideri l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + (h-1)y \\ (h-2)x + y + hz \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{e_1, e_2, e_3\}$ i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcolare: $L(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ h-2 \end{pmatrix}$ $L(e_2) = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $L(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$

(b) Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

$$A_L = \begin{pmatrix} 2 & h-1 & 0 \\ h-2 & 1 & h \end{pmatrix}$$

(c) Dire per quale/i valori di h l'applicazione è suriettiva: $h \neq 0$

(d) Posto $h = 0$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im } L$: $x + y = 0$

(e) Posto $h = 2$, determinare una base di $\text{Ker } L$: $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1, \mu_2 = 3$$

(b) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A :
dimensioni (molteplicità geometriche): $\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x - y = z - x = t - x = 0 \right\}, V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per ciascun autospazio di A :

$$\mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

(d) A è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. **SI'**: $\nu_1 = \mu_1 = 1, \nu_2 = \mu_2 = 3, \nu_1 + \nu_2 = 4$ (ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e sono tutti regolari).

4. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k :

$$\begin{cases} x + ky + z + (k^2 - 9)t = k - 3 \\ x + ky + z = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di k il sistema non ammette soluzioni: $k = -3$

(b) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1:
 $k \neq \pm 3$

(c) Posto $k = 1$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \text{ libero}$

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z - y = 3 \end{cases}$$

- (b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

- (c) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s :

rette INCIDENTI ($r \cap s = P_0 = (1, 0, 3)$).

- (d) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A , B , e P : $\pi: x + z - 4 = 0$

- (e) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π : $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

6. Si consideri la forma quadratica reale $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}xz + 5z^2.$$

- (a) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

.

- (b) Scrivere l'equazione canonica di Q : $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 2y'^2 + 6z'^2$.

- (c) Scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - z) \\ y' = y \\ z' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}z) \end{cases}$$

- (d) Stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita: definita POSITIVA.
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 febbraio 2010
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri la seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e calcolare l'autovalore corrispondente.
2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, determinare una base ortogonale del sottospazio $U = \text{Span}(\boldsymbol{v})^\perp$.
3. Verificare che U è un autospazio di A e calcolare l'autovalore corrispondente.