

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	17 febbraio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare $L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

(b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi standard di \mathbb{R}^3 :

(c) Determinare l'equazione/i cartesiana/e di $\text{Im } L$:

(d) Determinare una base di $\text{Ker } L$:

(e) Descrivere in forma parametrica l'insieme $\left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$:

2. Si considerino la seguente matrice quadrata di ordine 3 dipendente dal parametro reale h ed il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & h+1 \\ 2h+2 & -2 & 2 \\ 3 & -3h-3 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Per quali valori di h la matrice A è invertibile:

(b) Il rango della matrice A in funzione del parametro reale h :

(c) Per quali valori di h il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali:

(d) Per quali valori di h il vettore \mathbf{u} è una soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$:

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si consideri la retta r di equazioni: $x - y - z = y - z - 2 = 0$. Determinare:
- (a) La direzione della retta r :
 - (b) Le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per il punto $A = (-1, 1, 0)$:
 - (c) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s :
 - (d) La distanza tra le rette r e s :
-

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, in funzione del parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare:

- (a) Gli autovalori della matrice A , con le corrispondenti molteplicità algebriche:
 - (b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore in funzione del parametro k :
 - (c) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta.
-

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$$

- (a) Determinare il segno della forma quadratica:
- (b) Scrivere la forma canonica $q(x', y') =$:
- (c) Determinare la matrice M invertibile 2×2 tale che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:
- (d) Determinare per quali valori del parametro k la forma quadratica

$$q(x, y) + k(x^2 + y^2)$$

è definita positiva:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	17 febbraio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Sia A una matrice non nulla 2×2 tale che $A^2 = 0_{2 \times 2}$.

1. Si determini il determinante e il rango di A :
2. Si verifichi che $A^1 \in \text{Ker } A$:
3. Posto $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si determini la matrice A :