CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	17 febbraio 2011
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$:

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$:

   (c) Determinare l'equazione/i cartesiana/e di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (e) Descrivere in forma parametrica l'insieme $\left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \right\}$:

---

2. Si considerino la seguente matrice quadrata di ordine 3 dipendente dal parametro reale h ed il vettore $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} h+2 & -2 & h+2 \\ h+2 & -2 & 2 \\ 4 & -2h-4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) Per quali valori di h la matrice A è invertibile:

   (b) Il rango della matrice A in funzione del parametro reale h:

   (c) Per quali valori di h il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali:

   (d) Per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u}$ è una soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$:

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r di equazioni: $2x - z + 1 = 2x - y + z = 0$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per il punto $A = (-2, -1, 0)$:

   (c) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

   (d) La distanza tra le rette r e s:

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, in funzione del parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) Gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore in funzione del parametro k:

   (c) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

---

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y) = 8y^2 + 6xy$$

   (a) Determinare il segno della forma quadratica:

   (b) Scrivere la forma canonica $q(x', y') =$:

   (c) Determinare la matrice M invertibile 2×2 tale che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

   (d) Determinare per quali valori del parametro k la forma quadratica

$$q(x, y) + k(x^2 + y^2)$$

   è definita positiva:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	17 febbraio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0 \right\} \qquad W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0 \right\}$$

e sia A una matrice 3×3 tale che U è autospazio di A per l'autovalore 1 e W è autospazio di A per l'autovalore -2.

1. Si calcoli il polinomio caratteristico di A:
2. Si dimostri che A è diagonalizzabile determinando una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:
3. Si determini la matrice A: