CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**17 febbraio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$:

   (c) Determinare l'equazione/i cartesiana/e di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (e) Descrivere in forma parametrica l'insieme $\left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} \right\}$:

---

2. Si considerino la seguente matrice quadrata di ordine 3 dipendente dal parametro reale h ed il vettore $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} h & 2 & h \\ 2 & -2 & -h \\ 4 & 2h & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) Per quali valori di h la matrice A è invertibile:

   (b) Il rango della matrice A in funzione del parametro reale h:

   (c) Per quali valori di h il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali:

   (d) Per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u}$ è una soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$:

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r di equazioni: $2x + y - 1 = 2x - y - z = 0$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per il punto $A = (2, 0, 1)$:

   (c) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

   (d) La distanza tra le rette r e s:

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, in funzione del parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 4 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) Gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore in funzione del parametro k:

   (c) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

---

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y) = -10x^2 - 5y^2 + 12xy$$

   (a) Determinare il segno della forma quadratica:

   (b) Scrivere la forma canonica $q(x', y') =$:

   (c) Determinare la matrice M invertibile 2×2 tale che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

   (d) Determinare per quali valori del parametro k la forma quadratica

$$q(x, y) + k(x^2 + y^2)$$

   è definita positiva:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**17 febbraio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice quadrata di ordine 2, con $\det(A) = 0$ che ammette l'autovalore $\alpha = 1$ con autospazio di equazione $2x + y = 0$.

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A.
2. Stabilire se A è diagonalizzabile.
3. Nell'ipotesi che A sia reale simmetrica, trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.