CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 giugno 2011
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice quadrata A ed i vettori $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h^2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker} L) =$

   (b) Stabilire se L è surgettiva e/o iniettiva e/o bigettiva, e giustificare la risposta

   (c) Determinare la/le equazioni cartesiane ed una base per $\operatorname{Im} L$:

   (d) Calcolare $L(\boldsymbol{u}) =$

   (e) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} (k+1)x - 6y + 4z = 0 \\ -x + y + z = k - 2 \\ (2k+1)x - (1+4k)y + (k-1)z = k + 1 \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) I valori di k per cui il sistema ammette soluzioni:

   (b) Per quale valore di k la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 1, determinando in tale caso la soluzione generale:

   (c) La soluzione del sistema per $k = 2$:

---

3. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3 ed i vettori seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire quale/i fra i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ è/sono autovettore/i di A, precisando qual è in caso affermativo l'autovalore associato.

(b) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

(c) Fornire, se possibile, una matrice diagonale simile ad A, esplicitando la matrice del cambio di base necessario:

(d) Scrivere una matrice che abbia determinante, rango e traccia uguali a quelli di A, ma non sia simile ad A.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x + 2y - 2z = 0$ e la retta $t\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.
Determinare:

(a) La direzione $\boldsymbol{d}$ della retta t:

(b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (1, 1, 1)$:

(c) L'intersezione di t con π :

(d) La distanza fra il piano π ed il piano π' parallelo a π e passante per Q:

---

5. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

sia $U = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4 \colon \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_i, i = 1, 2, 3.\}$. Determinare:

(a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^\perp =$

(b) Una base ortogonale di U.

(c) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Siano $\mathbb{E}^2_O$ lo spazio vettoriale dei vettori del piano applicati in un punto O, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{E}^2_O$ un vettore non nullo ed $r = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Si consideri l'operatore $L\colon \mathbb{E}^2_O \to \mathbb{E}^2_O$ che associa al vettore $\boldsymbol{v}$ il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ su r.

1. Verificare che per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathbb{E}^2_O$ si ha: $L(\boldsymbol{v}) = \dfrac{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >}{||\boldsymbol{u}||^2}\boldsymbol{u}$.
2. Mostrare che L è un operatore lineare.
3. Fissata la base $\mathcal{B} = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}$ in $\mathbb{E}^2_O$, ponendo $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$, scrivere la matrice associata a L nella base $\mathcal{B}$.
4. Determinare gli autovalori e gli autospazi di L.