

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>22 giugno 2011</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. Si considerino l'operatore lineare  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito dalla matrice quadrata  $A$  ed i vettori  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} h^2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare:  $\dim(\text{Im } L) =$        $\dim(\text{Ker } L) =$   
(b) Stabilire se  $L$  è surgettiva e/o iniettiva e/o bigettiva, e giustificare la risposta  
(c) Determinare la/le equazioni cartesiane ed una base per  $\text{Im } L$ :  
(d) Calcolare  $L(\mathbf{u}) =$   
(e) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene a  $\text{Im } L$ .

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro  $h$ :

$$\begin{cases} x - y + z = h - 3 \\ 6x - hy - 4z = 2 - h \\ (3 - 4h)x + (2h - 1)y + (h - 2)z = h \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di  $h$  per cui il sistema ammette soluzioni:  
(b) Per quale valore di  $h$  la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 1, determinando in tale caso la soluzione generale:  
(c) La soluzione generale del sistema per  $h = -1$ :

3. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3 ed i vettori seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Stabilire quale/i fra i vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  è/sono autovettore/i di  $A$ , precisando qual è in caso affermativo l'autovalore associato.
- (b) Determinare gli autovalori della matrice  $A$ , con le corrispondenti molteplicità algebriche:
- (c) Fornire, se possibile, una matrice diagonale simile ad  $A$ , esplicitando la matrice del cambio di base necessario:
- (d) Scrivere una matrice che abbia determinante, rango e traccia uguali a quelli di  $A$ , ma non simile ad  $A$ .

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , si considerino il piano  $\pi: x - y + z = 0$  e la retta  $t: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$ . Determinare:

- (a) La direzione  $\mathbf{d}$  della retta  $t$ :
- (b) Le equazioni cartesiane della retta  $r$  perpendicolare al piano  $\pi$  e passante per  $Q = (1, 1, -1)$ :
- (c) L'intersezione di  $t$  con  $\pi$ :
- (d) La distanza fra il piano  $\pi$  ed il piano  $\pi'$  parallelo a  $\pi$  e passante per  $Q$ :

5. Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

sia  $U = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4: \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3.\}$ . Determinare:

- (a)  $\dim U =$                        $\dim U^\perp =$
- (b) Una base ortogonale di  $U$ .

- (c) La proiezione ortogonale su  $U$  del vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ :

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>22 giugno 2011</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio**

Fissato il vettore  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , sia  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ; si consideri l'applicazione  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$L(X) = X + 2\langle X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u},$$

1. Si dimostri che  $L$  è lineare.
2. Si determini la matrice rappresentativa di  $L$  rispetto alla base canonica.
3. Si dimostri che se  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\mathbf{u}$  allora  $\mathbf{v}$  è autovettore di  $L$  e se ne calcoli il corrispondente autovalore.
4. Si determini una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  composta da autovettori per  $L$  e si determini la matrice rappresentativa di  $L$  rispetto a tale base.