

|                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| <b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b> | <b>22 giugno 2011</b> |
| <b>Cognome e Nome:</b>              | <b>Matricola:</b>     |
| <b>Corso di Laurea:</b>             | <b>Anno di corso:</b> |

1. Si considerino l'operatore lineare  $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito dalla matrice quadrata  $A$  ed i vettori  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ h^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare:  $\dim(\text{Im } L) =$        $\dim(\text{Ker } L) =$   
(b) Stabilire se  $L$  è surgettiva e/o iniettiva e/o bigettiva, e giustificare la risposta  
(c) Determinare la/le equazioni cartesiane ed una base per  $\text{Im } L$ :  
(d) Calcolare  $L(\mathbf{u}) =$   
(e) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene a  $\text{Im } L$ .

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro  $k$ :

$$\begin{cases} (4k - 1)x - (1 + k)y + (2k - 1)z = 1 - k \\ x + y + z = -2 - k \\ -6x + 4y + (k - 1)z = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di  $k$  per cui il sistema ammette soluzioni:  
(b) Per quale valore di  $k$  la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 1, determinando in tale caso la soluzione generale:  
(c) La soluzione generale del sistema per  $k = 1$ :

3. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3 ed i vettori seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Stabilire quale/i fra i vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  è/sono autovettore/i di  $A$ , precisando qual è in caso affermativo l'autovalore associato.
- (b) Determinare gli autovalori della matrice  $A$ , con le corrispondenti molteplicità algebriche:
- (c) Fornire, se possibile, una matrice diagonale simile ad  $A$ , esplicitando la matrice del cambio di base necessario:
- (d) Scrivere una matrice che abbia determinante, rango e traccia uguali a quelli di  $A$ , ma non simile ad  $A$ .

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ , si considerino il piano  $\pi: 2x + y + 2z = 0$  e la retta  $t: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ .

Determinare:

- (a) La direzione  $\mathbf{d}$  della retta  $t$ :
- (b) Le equazioni cartesiane della retta  $r$  perpendicolare al piano  $\pi$  e passante per  $Q = (1, 1, 1)$ :
- (c) L'intersezione di  $t$  con  $\pi$ :
- (d) La distanza fra il piano  $\pi$  ed il piano  $\pi'$  parallelo a  $\pi$  e passante per  $Q$ :

5. Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sia  $U = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4: \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3.\}$ . Determinare:

- (a)  $\dim U =$                        $\dim U^\perp =$
- (b) Una base ortogonale di  $U$ .

- (c) La proiezione ortogonale su  $U$  del vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

|                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| <b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b> | <b>22 giugno 2011</b> |
| <b>Cognome e Nome:</b>              | <b>Matricola:</b>     |
| <b>Corso di Laurea:</b>             | <b>Anno di corso:</b> |

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio**

Siano  $\mathbb{E}_O^2$  lo spazio vettoriale dei vettori del piano applicati in un punto  $O$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_O^2$  un vettore non nullo ed  $r = \text{Span}(\mathbf{u})$ . Si consideri l'operatore  $L: \mathbb{E}_O^2 \rightarrow \mathbb{E}_O^2$  che associa al vettore  $\mathbf{v}$  il vettore simmetrico di  $\mathbf{v}$  rispetto ad  $r$ .

1. Verificare che per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_O^2$  si ha:  $L(\mathbf{v}) = 2 \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} - \mathbf{v}$ .
2. Mostrare che  $L$  è un operatore lineare.
3. Fissata la base  $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$  in  $\mathbb{E}_O^2$ , ponendo  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ , scrivere la matrice associata a  $L$  nella base  $\mathcal{B}$ .
4. Determinare gli autovalori e gli autospazi di  $L$ .