

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	25 dicembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vettori di V . Che cosa significa che i vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sono un sistema di generatori di V ?

2. Sia $L: V \rightarrow W$ *lineare*; mostrare che $\text{Im } L$ è un sottospazio vettoriale di W .

3. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una base di \mathbb{R}^3 :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; sì no

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì no

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì no

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì no

4. Si consideri la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbb{R}^3 . Scrivere il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base \mathcal{B} .
-

5. Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare; sia $\text{Ker } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$. L è suriettiva? motivare la risposta.
-

6. Sia A una matrice 4×4 e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Supponendo di sapere che gli autovalori di A sono 7 e -3 , e che l'autospazio V_7 ha equazione $x + y + z = x - y + z + t = 0$, mentre l'autospazio V_{-3} ha equazione $x + 2y = 3x + z + t = 0$, si determini il polinomio caratteristico di A .
-

7. È possibile costruire un'applicazione lineare iniettiva $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$? Lo studente motivi la risposta.
-

8. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tre elementi fissati *non nulli* di uno spazio vettoriale V , e siano $V_1 = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $V_2 = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ due sottospazi di V . A quali condizioni \mathbf{v}_1 è una base per $V_1 \cap V_2$?
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	25 dicembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vettori di V . Che cosa significa che i vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sono una base di V ?

2. Sia $L: V \rightarrow W$ *lineare*; mostrare che $\text{Ker } L$ è un sottospazio vettoriale di V .

3. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono sistemi di generatori di \mathbb{R}^3 :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$ sì no

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$ sì no

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$ sì no

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$ sì no

4. Si consideri la base di \mathbb{R}^3 formata dai vettori $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Sia X il vettore di \mathbb{R}^3 le cui coordinate rispetto a tale base sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini X .
-

5. Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare; sia $\text{Im } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0 \right\}$. L è iniettiva? motivare la risposta.
-

6. Sia A una matrice 4×4 e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Supponendo di sapere che gli autovalori di A sono 5 e -2 , e che l'autospazio V_5 ha equazione $x + y + z = x - y + z + t = z - t = 0$, mentre l'autospazio V_{-2} ha equazione $x + 2y = 0$, si determini il polinomio caratteristico di A .
-

7. È possibile costruire un'applicazione lineare suriettiva $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Lo studente motivi la risposta.
-

8. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tre elementi fissati *non nulli* di uno spazio vettoriale V , e siano $V_1 = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $V_2 = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ due sottospazi di V . A quali condizioni $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $V_1 + V_2$?
-