CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino l'operatore lineare $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim(\text{Im } L) = 3$ $\dim(\text{Ker } L) = 1$

(b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im } L$:

$$\text{Im } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 4z + 2t = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per il sottospazio $\text{Ker } L$:

$$\mathcal{B}_{\text{Ker } L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare: $L(\text{Span}(\mathbf{v})) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(e) Stabilire se il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di L .

$$\text{NO: infatti } L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \notin \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} hx + y + (3h + 1)z - t = 3 \\ -2x + (h + 2)y + (h - 4)z - 2t = 4 \\ x + hy + (3 + h)z - t = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di h per cui il sistema ammette soluzioni: $h \neq 1$.
- (b) Per quali valori di h la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2: $h \neq -2$.
- (c) La soluzione generale del sistema per $h = -2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori della matrice A , con le corrispondenti molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2; \quad \lambda_2 = 2, \mu_2 = 1.$$

- (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A :

$$V_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}, \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = y + z = 0\}, \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

SI', è diagonalizzabile: gli autovalori sono tutti regolari e sono tutti in $\mathbb{R}$, ovvero, la somma delle molteplicità coincide con l'ordine della matrice; pertanto una base di $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}$, ossia ESISTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI A .

Le colonne della matrice N sono i vettori della base

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si considerino i punti $U = (0, 1, 2)$ e $V = (2, 0, 2)$. Determinare:

(a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$: $x + 2y - z = 0$

(b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (1, 1, -1)$: $x - y - z - 1 = x + z = 0$

(c) La distanza di π da Q : $\delta(\pi, Q) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{11}$ dall'origine del riferimento O :

$$(-1, -3, 1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

5. Si considerino il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) $\dim U = 3$ $\dim U^\perp = 1$

(b) Una base ortogonale di U .

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Le equazioni cartesiane di $U^\perp$. $z - 3t = x + 5t = y = 0$

(d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v}^\parallel = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2; si consideri il sottoinsieme delle matrici reali simmetriche:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^T\}.$$

1. Verificare che se $A, B \in U$, allora si ha: $A + B \in U$.
2. Stabilire se per ogni $A, B \in U$ si ha anche $A \cdot B \in U$.
3. Verificare che U è un sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
4. Determinare una base per U e completarla ad una base di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Risoluzione.

(• *Punto 1*) Se $A, B \in U$, allora $A^T = A$ e $B^T = B$.

Ora $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B = (A + B)$, quindi $(A + B) \in U$.

(• *Punto 2*) Se $A, B \in U$, allora $A^T = A$ e $B^T = B$.

Ora $(A \cdot B)^T = (B^T) \cdot (A^T) = B \cdot A = (A^T \cdot B^T)^T = (A \cdot B)^T$, quindi $(A \cdot B)^T = A \cdot B$, e pertanto $A \cdot B \in U$.

(• *Punto 3*) Il punto 2 mostra che l'insieme U è chiuso rispetto all'addizione fra vettori. Verifichiamo che lo è anche per la moltiplicazione esterna per uno scalare; siano $A \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ rispettivamente una matrice di U (quindi, un vettore dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$), ed uno scalare reale. Si ha

$$(\alpha A)^T = \alpha(A^T) = \alpha A,$$

quindi, anche il vettore αA appartiene ad U .

Pertanto, le due proprietà di definizione sono verificate, ed U risulta essere un sottospazio vettoriale.

(• *Punto 4*) Una base di U è:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

che si completa ad una base di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ con

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$