| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **26 gennaio 2011** |
|---|---|
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice quadrata $A$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) = 2 \qquad \dim(\operatorname{Ker} L) = 2$

(b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - z - t = x - y = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di $L$. SÌ: infatti

$$L(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ossia, $\boldsymbol{v}$ è autovettore di $A$ con autovalore $\lambda = 4$.

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro $k$:

$$\begin{cases} x + (1+k)y + (k-2)z - t = 1 \\ (k-2)x + (3k-5)y + z - t = 4 \\ -2x + (k-6)y + kz - 2t = 6 \end{cases}$$

Determinare:

(a) I valori di $k$ per cui il sistema ammette soluzioni: $k \neq 3$ .

(b) Per quali valori di $k$ la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2: $k = 0$ .

(c) La soluzione generale del sistema per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice $A$, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 2; \qquad \lambda_2 = -1,\ \mu_2 = 1.$$

(b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di $A$:

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = 0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 3y = x + z = 0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

SI', è diagonalizzabile: gli autovalori sono tutti regolari e sono tutti in $\mathbb{R}$, ovvero, la somma delle molteplicità coincide con l'ordine della matrice; pertanto una base di $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}$, ossia ESISTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI $A$.

Le colonne della matrice $N$ sono i vettori della base

$$N = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $U = (2, 0, 2)$ e $V = (0, 1, 3)$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per l'origine $O$ generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$: $x + 3y - z = 0$

   (b) Le equazioni cartesiane della retta $r$ perpendicolare al piano $\pi$ e passante per $Q = (2, 1, -1)$: $x + z - 1 = y + 3z + 2 = 0$

   (c) La distanza di $\pi$ da $Q$: $\delta(\pi, Q) = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$

   (d) I punti di $r$ che hanno distanza $\sqrt{5}$ dall'origine del riferimento $O$:

$$(1, -2, 0) \quad \text{e} \quad \left(\frac{21}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{10}{11}\right)$$

---

5. Si considerino il sottospazio $U$ di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\7\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-3\\2\\-6\end{pmatrix}\right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\8\\1\end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) $\dim U = 3$ $\qquad \dim U^\perp = 1$

   (b) Una base ortogonale di $U$.

$$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^\perp$. $x + y = x + z - t = x - z = 0$

   (d) La proiezione ortogonale su $U$ del vettore $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\6\\-3\end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **26 gennaio 2011** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio**.

Sia $A$ una matrice $3 \times 3$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori di $A$ con relativi autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

1. La matrice $A$ è diagonalizzabile? Motivare la risposta.
2. Sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, si scriva $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$.
3. Si calcoli $A\boldsymbol{v}$.
4. Si determini la matrice $A$.

**Risoluzione.**

*(• Punto 1) La matrice $A$ ha 3 autovalori distinti, ed è di ordine 3; il polinomio caratteristico risulta, quindi, interamente fattorizzato in termini lineari in $\mathbb{R}$, e gli autospazi associati a ciascun autovalore hanno conseguentemente dimensione unitaria e coincidente con la molteplicità algebrica di ogni autovalore.*

*Questo basta a garantire che esista una base formata da autovettori, ossia che la matrice sia diagonalizzabile.*

*(• Punto 2) È immediato constatare che*

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \,.$$

*In altre parole, poiché $\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$, il vettore delle coordinate di $\boldsymbol{v}$ su questa base è:*

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

*(• Punto 3) Per la linearità, e considerando che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sono autovettori, con autovalori come descritto nel testo, possiamo scrivere:*

$$A\,\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\,\boldsymbol{v}_1 + A\,\boldsymbol{v}_2 = 0\,\boldsymbol{v}_1 + 1\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*(• Punto 4) Le colonne della matrice $A$ sono le immagini dei vettori $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ della base canonica $\mathcal{B}_0$, rappresentate nella base medesima. Basta quindi riuscire a scrivere i tre vettori della base canonica come combinazione lineare di vettori della base $\mathcal{B}_V$; si osserva subito che*

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2 \tag{1a}$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1\,. \tag{1b}$$

*Il terzo vettore $\boldsymbol{e}_2$ ci può ricavare facilmente:*

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3\,,$$

*usando le equazioni (1).*

*Seguendo la strada del punto 3, possiamo calcolare esplicitamente le immagini dei tre vettori:*

$$A\,\boldsymbol{e}_1 = A\,\boldsymbol{v}_3 - A\,\boldsymbol{v}_2 = (-1)\boldsymbol{v}_3 - 1\,\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$A\,\boldsymbol{e}_2 = A\,\boldsymbol{v}_1 + A\,\boldsymbol{v}_2 - A\,\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$A\,\boldsymbol{e}_3 = A\,\boldsymbol{v}_3 - A\,\boldsymbol{v}_1 = (-1)\boldsymbol{v}_3 + 0\,\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*La matrice $A$ è pertanto:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

*e si verifica facilmente che la matrice soddisfa le richieste del problema.*