CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L)$, $\dim(\operatorname{Ker} L)$.

(b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) =$

(e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L.

A molte delle richieste che seguono si può rispondere mediante una riduzione a scala della matrice; affianchiamo alla matrice una colonna con le variabili cartesiane nelle quali esprimeremo le equazioni dell'immagine dell'applicazione lineare. Al termine del procedimento potremo dare la risposta ai primi 3 punti.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & x \\ -1 & 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & 1 & z \\ 0 & -1 & 1 & -2 & t \end{array}\right) \tag{1}$$

Conserviamo la prima riga, alla seconda aggiungiamo la prima, alla terza togliamo la prima; la quarta riga ha già il primo elemento nullo.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 2 & y+x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & z-x \\ 0 & -1 & 1 & -2 & t \end{array}\right);$$

ora, sottraiamo alla terza riga metà della seconda, e sommiamo alla quarta metà della seconda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 2 & y+x \\ 0 & 0 & 2 & -2 & z-x-(x+y)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t+(x+y)/2 \end{array}\right).$$

Ora, conviene scambiare la quarta e la terza riga, per evitare altre frazioni; fatto questo, sottraiamo alla quarta la terza moltiplicata per 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 2 & y+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t+(x+y)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x-(x+y)/2-2[t+(x+y)/2] \end{array}\right);$$

semplificando e riordinando, dopo avere moltiplicato per -2 l'ultima riga, abbiamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 2 & y+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t+(x+y)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5x+3y-2z+4t \end{array}\right). \tag{2}$$

La matrice presenta 3 *pivot*, quindi questo fornisce il suo rango, ossia la dimensione dell'immagine dell'applicazione L; coerentemente, l'ultima riga dei termini della matrice è nulla: l'espressione a destra uguagliata a 0 fornisce, pertanto, l'equazione che individua l'immagine. Il teorema delle dimensioni garantisce che la dimensione del nucleo è

$$\dim \operatorname{Ker} L = 4 - \operatorname{rg} A = 4 - 3 = 1;$$

per determinare una base del kernel, basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A, e per questo la riduzione a scala effettuata (2) ci permette di scrivere le equazioni da risolvere *all'indietro*. Indicate anche in questo caso con $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ le coordinate del generico vettore del dominio, la variabile libera è la t, collocata nella colonna *non* corrispondente ad un pivot:

$$\begin{cases} z-t=0 \\ 2y+2t=0 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}. \tag{3}$$

Portando la t nel secondo membro in ciascuna equazione, e risolvendo, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R},$$

che permette immediatamente di indivduare nel vettore che è moltiplicato da t la base del nucleo.

Possiamo quindi rispondere ai primi punti.

(a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) = 3$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker} L) = 1$

(b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, 5x + 3y - 2z + 4t = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ora procediamo con gli ultimi punti

(d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}))$ Le immagini secondo un'applicazione lineare dei vettori della base di un sottospazio U sono un sistema di generatori per il sottospazio immagine $L(U)$. Pertanto, $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) = \operatorname{Span}(L(\boldsymbol{v}))$. Basta calcolare

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{v}) &= A\boldsymbol{v} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

(Poiché il vettore immagine è banalmente linearmente indipendente (non è nullo), esso non solo genera l'immagine $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}))$, ma ne è anche una base).

Questo ci permette di affermare che

$$L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L.

In base alla (4) possiamo già rispondere.

$$\text{NO: infatti} \quad L(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \notin \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In altre parole, non esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R} \,|\, L(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h:

$$\begin{cases} x + (2-h)y + (5-h)z + t = 0 \\ (2-h)x + y + (7-3h)z + t = 3 \\ -2x + (4-h)y - (2+h)z + 2t = 4 \end{cases}$$

Determinare:

(a) I valori di h per cui il sistema ammette soluzioni.

(b) Per quali valori di h la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2.

(c) La soluzione generale del sistema per $h = 3$.

La matrice dei coefficienti del sistema è di ordine 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-h & 5-h & 1 \\ 2-h & 1 & 7-3h & 1 \\ -2 & 4-h & -(2+h) & 2 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

la matrice completa $\tilde{A} = (A|B)$, con la colonna dei termini noti $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, è di ordine 3×5. Nessuna delle due matrici è quadrata: per studiarne il rango al variare di $h \in \mathbb{R}$, conviene iniziare da una sottomatrice 3×3 di A, calcolandone il determinante. Per tutti i valori di h per i quali questo determinante non è nullo, potreo affermare che il rango della matrice A e quello della matrice $\tilde{A}$ coincidono con il rango massimo, ossia 3.

Partiamo dalla sottomatrice formata dalle colonne A^1, A^2, A^4, che riduce al minimo la presenza del parametro nei termini. Usando qualche operazione di riga o di colonna invariante per il calcolo del determinante, abbiamo:

$$\begin{aligned}\det(A^1|A^2|A^4) &= \begin{vmatrix} 1 & 2-h & 1 \\ 2-h & 1 & 1 \\ -2 & 4-h & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad (A^1 - A^3) \text{ al posto di } A^1 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2-h & 1 \\ 1-h & 1 & 1 \\ -4 & 4-h & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad (A_2 - A_1) \text{ al posto di } A_2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2-h & 1 \\ 1-h & h-1 & 0 \\ -4 & 4-h & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad (A^2 - A^1) \text{ al posto di } A^2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2-h & 1 \\ 1-h & 0 & 0 \\ -4 & -h & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{sviluppiamo secondo la seconda riga} \\ &= -(1-h)\begin{vmatrix} 2-h & 1 \\ -h & 2 \end{vmatrix} = (h-1)(4-2h+h) = (h-1)(4-h)\,.\end{aligned}$$

Quindi, sicuramente per $h \neq 1, 4$ il sistema è risolvibile, e, siccome $\operatorname{rg} A = 3$ la dimensione della soluzione in tutti questi casi è $\dim \mathrm{Sol} = 4 - \operatorname{rg} A = 4 - 3 = 1$.

A parte, esaminiamo i casi rimasti. Cominciamo con $h = 1$; in tale caso la matrice dei coefficienti diventa:

$$A(h=1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha le prime due righe uguali; la sottomatrice formata dalle prime due colonne e le ultime due righe ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5 \neq 0\,,$$

quindi $\operatorname{rg} A = 2$. La matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

invece ha rango 3: basta calcolare il determinante della sottomatrice 3×3 formata dalle ultime 3 colonne:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(8+3) = 33$$

per convincersene.

Pertanto, per $h = 1$ il sistema non è risolvibile.

Vediamo ora il caso di $h = 4$; la matrice dei coefficienti è:

$$A(h=4) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & -6 & 2. \end{pmatrix}$$

Studiamo il rango mediante una riduzione a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & -6 & 2. \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 4. \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

ossia il rango della matrice è 2; per la matrice completa abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -6 & 2 & 4. \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix},$$

quindi il rango non aumenta: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = 2$. Il sistema è risolvibile, e la dimensione della soluzione è $\dim \mathrm{Sol} = 4 - \operatorname{rg} A = 4 - 2 = 2$.

Per risolvere il sistema con $h = 3$, operiamo una riduzione a scala. Scriviamo la matrice dei coefficienti A per $h = 3$ e affianchiamo la colonna de termini noti valutata in $h = 3$ (in questo caso, banalmente B non dipende da h):-

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

La riduzione mostra che possiamo tenere come parametro libero la variabile z, e, risolvendo all'indietro abbiamo:

$$\begin{cases} 2t = 3 \\ -y - z + 4t = 4 \\ x - y + 2z + t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ y = -z + 4t - 4 = -z + 6 - 4 = -z + 2 \\ x = y - 2z - t = -z + 2 - 2z - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} - 3z \end{cases}.$$

Riassumendo:

(a) I valori di h per cui il sistema ammette soluzioni: $h \neq 1$.

(b) Per quali valori di h la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2: $h = 4$.

(c) La soluzione generale del sistema per $h = 3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}.$$

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

(b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

(c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice; cerchiamo le radici reali del polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[-(2-\lambda)(3+\lambda)+4] = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) = -(1-\lambda)^2(\lambda+2)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

sviluppando il determinante secondo l'ultima colonna. Il polinomio ha due radici:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{con molteplicità } \mu_1 = 2 \tag{7}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \text{con molteplicità } \mu_2 = 1. \tag{8}$$

Passiamo ora a determinare gli autospazi. Per il primo autovalore $\lambda_1 = 1$, la dimensione dell'autospazio V_1 è

$$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = 3 - \operatorname{rg}(A - I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2\,,$$

come si può facilmente ricavare osservando che la seconda colonna è l'opposto della prima, e la terza colonna è nulla. Osserviamo subito che, a questo punto il secondo autospazio non può che avere dimensione unitaria, che è la minima, e, quindi, potremo trovare una base di autovettori, ossia la matrice è diagonalizzabile.

Per trovare le equazioni degli autospazi, scriviamo esplicitamente le equazioni che individuano il nucleo di $(A-I)$; il rango della matrice è unitario, quindi solo una riga, ossia un'equazione, sono linearmente indipendenti:

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\}\,,$$

da cui è facile ricavare una base: la terza componente è libera, le altre due devono coincidere. In altre parole, la forma parametrica è:

$$\begin{cases} x = s \\ y = s \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

ed una base di V_1 è ottenibile ponendo $s = 1$, $t = 0$ e $s = 0$, $t = 1$:

$$\mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il secondo autovalore $\lambda_1 = -2$, la dimensione dell'autospazio V_2 è

$$\dim V_2 = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = 3 - \operatorname{rg}(A + 2I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1\,,$$

come già avevamo previsto, e osservando che la matrice $A + 2I$ ha le prime due righe uguali, e la terza indipendente da queste. Serviranno quindi due equazioni cartesiane per l'autospazio V_2, che otteniamo dalla seconda e dalla terza riga della matrice:

$$V_2 = \operatorname{Ker}(A + 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 4x - y = x - y + 3z = 0 \right\},$$

da cui ricaviamo una base scrivendo le equazioni in forma parametrica; con x libera, otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4t & t \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{y - x}{3} = \dfrac{4x - x}{3} = x = t \end{cases}$$

ed una base di V_2 è ottenibile ponendo $t = 1$:

$$\mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Un cambio di base che rende la matrice A diagonale, ossia per il quale l'applicazione rappresentata da A nella base canonica ha una rappresentazione diagonale si ottiene passando ad una base di autovettori, ossia alla base formata dall'unione $\mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}$, che costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.

Possiamo riassumere i risultati.

(a) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 2; \qquad \lambda_2 = -2,\ \mu_2 = 1.$$

(b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

$$V_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = y - 4z = 0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

SI', è diagonalizzabile: gli autovalori sono tutti regolari e sono tutti in $\mathbb{R}$, ovvero, la somma delle molteplicità coincide con l'ordine della matrice; pertanto una base di $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}$, ossia ESISTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI A.

Le colonne della matrice N sono i vettori della base

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, si considerino i punti $U = (1, 2, 0)$ e $V = (0, 2, -2)$. Determinare:

(a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$.

Banalmente, date le coordinate dei punti U, V, possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ed il piano richiesto è $\pi = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$. In forma parametrica, scriveremo:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s + 2t \\ z = -2t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Eliminando i parametri, otteniamo:

$$y + z = 2s = 2x$$

da cui ricaviamo l'equazione del piano in forma cartesiana:

$$2x - y - z = 0.$$

(b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (1, -1, -1)$.
Un vettore ortogonale al piano π si ottiene ponendo come coordinate ordinatamente i coefficienti delle variabili x, y, z nell'equazione di π:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

la direzione della retta r è data proprio da $\boldsymbol{N}$, e, imponendo il passaggio per Q possiamo scrivere le equazioni di r in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

Occorre eliminare il parametro: questo si ottiene sommando le tre equazioni membro a membro, o sottraendo le ultime due membro a membro. Le equazioni ottenute sono

$$x + y + z + 1 = y - z = 0$$

(c) La distanza di π da Q.
È una banale applicazione della formula della distanza punto-piano.

$$\delta(\pi, Q) = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) - (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

(d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{11}$ dall'origine del riferimento O.
Riprendiamo l'equazione di r in forma parametrica (eq. 9), e scriviamo la condizione che la distanza dall'origine sia quella richiesta:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (1+2t)^2+2(1+t)^2 = (\sqrt{11})^2 \implies 6t^2+8t+3 = 11$$

che dà un'equazione di secondo grado nel parametro t. Risolta, questa equazione fornisce i due valori

$$t_1 = -2\,, \qquad t_2 = \frac{2}{3}.$$

I punti cercati si ottengono dalle (eq. 9), sostituendo i due valori del parametro ottenuti:

$$P_1 = (-3, 1, 1) \quad \text{e} \quad P_2 = (\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$$

5. Si considerino il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) $\dim U$, $\dim U^\perp =$

(b) Una base ortogonale di U.

(c) Le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

(d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v}$.

Occorre stabilire se i vettori che generano U sono linearmente indipendenti o no: per fare questo, basta trovare il rango della matrice le cui colonne sono costituite da tali vettori, ossia della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Procediamo mediante riduzione a scala, scambiando la prima con l'ultima riga, per comodità di calcolo (evitare frazioni): il rango non cambia se si cambia l'ordine delle righe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi sono 3 pivot, quindi la matrice ha rango 3, ed i vettori sono linearmente indipendenti, ossia una base di U è data dai tre vettori $\mathcal{B}'_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, con

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, $\dim U = 3$ e $\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 3 = 1$, poiché i due spazi sono in somma diretta.

Procediamo con un algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale: in sequenza, ad ogni vettore della base dobbiamo sotrarre le proiezioni sui vettori della base ortogonale precedentemente ottenuti, partendo con il primo vettore della nuova base che coincide con il primo vettore della vecchia base.

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 \,, \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{|\boldsymbol{w}_1|^2} \boldsymbol{w}_1 \,, \tag{10b}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{|\boldsymbol{w}_1|^2} \boldsymbol{w}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{|\boldsymbol{w}_2|^2} \boldsymbol{w}_2 \,. \tag{10c}$$

Cominciamo a determinare il secondo vettore:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 6 - (-1) + 4 + 3 = 14 \\
|\boldsymbol{w}_1|^2 &= 4 + 1 + 1 + 1 = 7 \\
\boldsymbol{w}_2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{14}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ora possiamo procedere con il terzo vettore:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -4 + 5 + 4 + 2 = 7 \\
\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 - 5 + 8 + 2 = 7 \\
|\boldsymbol{w}_2|^2 &= 1 + 1 + 4 + 1 = 7 \\
\boldsymbol{w}_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Siamo in possesso di una base ortogonale di U: è la lista $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$.

Per determinare le equazioni di $U^\perp$, basta ricordare che è sufficiente imporre l'ortogonalità ai vettori di una base di U. Partendo dalla base originaria (per ridurre la possibilità di introdurre errori), abbiamo le equazioni che individuano il complemento ortogonale:

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ 3x - y + 4z + 3t = 0 \\ -2x - 5y + 4z + 2t = 0 \,. \end{cases}$$

Queste equazioni sono quelle richieste. Possiamo procedere però ad una loro semplificazione; osserviamo che stiamo cercando il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

e che, quindi, possiamo procedere con la consueta riduzione a scala:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 35 & 21 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo sfruttato che le equazioni del nucleo sono omogenee per eliminare le frazioni.

Il sistema da risolvere all'indietro è

$$\begin{cases} 35z + 21t = 0 \\ y + 5z + 3t = 0 \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ 2x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

o, anche, semplificando

$$\begin{cases} 5z + 3t = 0 \\ y = 0 \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$$

che, sono le equazioni per $U^\perp$ in una forma più semplice. Il sistema, risolto, dà

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per proiettare un vettore $\boldsymbol{v}$ sullo spazio U basta calcolare i coefficienti di Fourier per quel vettore sui vettori della base ortogonale:

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{|\boldsymbol{w}_1|^2}\boldsymbol{w}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{|\boldsymbol{w}_2|^2}\boldsymbol{w}_2 + \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_3 \rangle}{|\boldsymbol{w}_3|^2}\boldsymbol{w}_3.$$

Calcolando i prodotti scalari che servono

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 + 6 + 8 - 2 = 14 \tag{11}$$

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -1 - 6 + 16 - 2 = 7 \tag{12}$$

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = -3 + 30 + 8 - 0 = 35 \tag{13}$$

e osservando che $|\boldsymbol{w}|^2 = 35$, possiamo determinare:

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = 2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Riassumendo.

(a) $\dim U = 3$ $\qquad\qquad \dim U^{\perp} = 1$

(b) Una base ortogonale di U.

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$. $3x - z = 5x + t = y = 0$

(d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissata la matrice quadrata di ordine 2 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, considerare il seguente sottoinsieme di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$:

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \operatorname{tr}(MA) = 0\},$$

dove $\operatorname{tr}(MA)$ indica la traccia della matrice MA.

1. Verificare che se $A, B \in \mathcal{U}$, anche $(A + B) \in \mathcal{U}$, e che, per qualunque numero reale α, $\alpha A \in \mathcal{U}$.
2. Mostrare che $\mathcal{U}$ è un sottospazio vettoriale reale di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
3. Mostrare che l'applicazione $L \colon \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \to \mathbb{R}$, tale che $L(A) = \operatorname{tr}(MA)$ è lineare.
4. Determinare la dimensione di $\mathcal{U}$.

Risoluzione.

(• Punto 1) Se $A, B \in \mathcal{U}$*, allora* $\operatorname{tr}(MA) = \operatorname{tr}(MB) = 0$.

Ora $\operatorname{tr}(M(A + B)) = \operatorname{tr}(MA + MB) = \operatorname{tr}(MA) + \operatorname{tr}(MB) = 0 + 0 = 0$, *quindi* $A + B \in \mathcal{U}$.

Inoltre, $\operatorname{tr}(M(\alpha A)) = \operatorname{tr}(\alpha(MA)) = \alpha \operatorname{tr}(MA) = \alpha * 0 = 0$, *quindi* $\alpha A \in \mathcal{U}$.

(• Punto 2) È un'immediata conseguenza di quanto mostrato nel punto 1: l'insieme $\mathcal{U}$ *è chiuso rispetto all'addizione fra vettori e alla moltiplicazione esterna per uno scalare, quindi è un sottospazio vettoriale di* $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(• Punto 3) Qualunqie sia la scelta di matrici $A, B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ *e per ogni scalare* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

1. $L(A + B) = \operatorname{tr}(MA + MB) = \operatorname{tr}(MA) + \operatorname{tr}(MB) = L(A) + L(B)$;
2. $L(\alpha A) = \operatorname{tr}(M(\alpha A)) = \operatorname{tr}(\alpha(MA)) = \alpha \operatorname{tr}(MA) = \alpha L(A)$.

Quindi l'applicazione soddisfa le proprietà di un'applicazione lineare.

(• Punto 4) Osserviamo che l'insieme $\mathcal{U}$ *è il nucleo dell'applicazione lineare* L *definita al punto 3 (e che questo garantisce, ancora, che* $\mathcal{U}$ *sia un sottospazio vettoriale). Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

la generica matrice di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$*; possiamo scrivere*

$$M\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix}$$

Quindi, $\operatorname{tr}(M\,A) = a + 2b + d$*; il nostro sottospazio risulta individuato dall'equazione*

$$a + 2b + d = 0$$

nelle 4 *variabili* a, b, c, d*, ossia un sistema di* 1 *equazione in* 4 *incognite; il rango della matrice dei coefficienti è banalmente* 1*, non essendo tutti nulli.*

La dimensione dell'insieme delle soluzioni, ossia la dimensione del nucleo di L *risulta, pertanto, in base al Teorema delle dimensioni data da*

$$\dim \operatorname{Ker} L = \dim \mathcal{U} = 4 - 1 = 3.$$