CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) = 2 \qquad \dim(\operatorname{Ker} L) = 2$

(b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - z = 2x - y - t = 0 \right\}$$

(c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L. SÌ: infatti

$$L(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ossia, $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A con autovalore $\lambda = 4$.

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} -x+(k-1)y+(k+2)z-t=1 \\ 2x+(k+6)y+kz-2t=6 \\ (k+2)x+(3k+5)y-z-t=4 \end{cases}$$

Determinare:

(a) I valori di k per cui il sistema ammette soluzioni: $k \neq -3$.

(b) Per quali valori di k la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2: $k = 0$.

(c) La soluzione generale del sistema per $k = -2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} .$$

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = -2,\ \mu_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 1,\ \mu_2 = 1.$$

(b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+z=0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x-z=3y-2z=0\},\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

SI', è diagonalizzabile: gli autovalori sono tutti regolari e sono tutti in $\mathbb{R}$, ovvero, la somma delle molteplicità coincide con l'ordine della matrice; pertanto una base di $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}$, ossia ESISTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI A.

Le colonne della matrice N sono i vettori della base

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $U = (0, 2, -2)$ e $V = (1, 3, 0)$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$: $3x - y - z = 0$

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (1, -1, -2)$: $y - z - 1 = x + 3y + 2 = 0$

   (c) La distanza di π da Q: $\delta(\pi, Q) = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$

   (d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dall'origine del riferimento O:

$$(-2, 0, -1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{8}{11}, -\frac{10}{11}, -\frac{21}{11}\right)$$

---

5. Si considerino il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-2\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-3\\2\\7\end{pmatrix}\right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\-6\\8\\-2\end{pmatrix}.$$

Determinare:

   (a) $\dim U = 3$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} = 1$

   (b) Una base ortogonale di U.

$$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\5\end{pmatrix}\right\}$$

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$. $8x + 5z + 3t = x - y - 2z - t = z - t = 0$

   (d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\6\\-4\end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

1. Si determini la dimensione di U.
2. Si completi una base di U ad una base di $\mathbb{R}^4$
3. Si scriva un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che $L(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{w}) = 0$.
4. Si scriva un' applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} L = U$.

Risoluzione.

(• Punto 1) Basta determinare il rango della matrice $A = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ *le cui colonne sono costituite dai vettori* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.

Si verifica immediatamente che $\operatorname{rg} A = 3$, *quindi* $\dim U = 3$.

(• Punto 2) Aggiungiamo a 3 *vettori la lista dei vettori della base canonica, e procediamo a cancellare quelli che sono linearmente dipendenti.*

Banalmente, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}$, *quindi lo scartiamo. Consideriamo la lista* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_2\}$; *si vede subito che questa è formata da vettori linearmente indipendenti:*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \neq 0\,.$$

Quindi, $\boldsymbol{e}_2$ *completa la base di* U *ad una base di* $\mathbb{R}^4$, *poiché questa è formata da* 4 *vettori.*

Per esempio (• Punto 3)

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y - t$$

(• Punto 4) Per esempio

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - t \\ 2t - 2y \end{pmatrix}$$