

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>26 gennaio 2011</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. Si considerino l'operatore lineare  $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito dalla matrice quadrata  $A$  ed il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare:  $\dim(\text{Im } L) =$        $\dim(\text{Ker } L) =$
- (b) Determinare la/le equazioni cartesiane di  $\text{Im } L$ :
- (c) Determinare una base per il sottospazio  $\text{Ker } L$ :
- (d) Determinare:  $L(\text{Span}(\mathbf{v})) =$
- (e) Stabilire se il vettore  $\mathbf{v}$  è un autovettore di  $L$ .

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro  $h$ :

$$\begin{cases} hx + y + (3h + 1)z - t = 3 \\ -2x + (h + 2)y + (h - 4)z - 2t = 4 \\ x + hy + (3 + h)z - t = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di  $h$  per cui il sistema ammette soluzioni:
- (b) Per quali valori di  $h$  la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2:
- (c) La soluzione generale del sistema per  $h = 0$ :

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori della matrice  $A$ , con le corrispondenti molteplicità algebriche:
  - (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di  $A$ :
  - (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice  $N$  tale che  $N^{-1}AN$  è diagonale.
- 

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , si considerino i punti  $U = (0, 1, 2)$  e  $V = (2, 0, 2)$ . Determinare:

- (a) L'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per l'origine  $O$  generato dai vettori  $\overrightarrow{OU}$  e  $\overrightarrow{OV}$ :
  - (b) Le equazioni cartesiane della retta  $r$  perpendicolare al piano  $\pi$  e passante per  $Q = (1, 1, -1)$ :
  - (c) La distanza di  $\pi$  da  $Q$ :
  - (d) I punti di  $r$  che hanno distanza  $\sqrt{11}$  dall'origine del riferimento  $O$ :
- 

5. Si considerino il sottospazio  $U$  di  $\mathbb{R}^4$  ed il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ :

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (a)  $\dim U =$                        $\dim U^\perp =$
  - (b) Una base ortogonale di  $U$ .
  - (c) Le equazioni cartesiane di  $U^\perp$ .
  - (d) La proiezione ortogonale su  $U$  del vettore  $\mathbf{v}$ .
-

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>26 gennaio 2011</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio.**

Sia  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2; si consideri il sottoinsieme delle matrici reali simmetriche:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^T\}.$$

1. Verificare che se  $A, B \in U$ , allora si ha:  $A + B \in U$ .
2. Stabilire se per ogni  $A, B \in U$  si ha anche  $A \cdot B \in U$ .
3. Verificare che  $U$  è un sottospazio di  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ .
4. Determinare una base per  $U$  e completarla ad una base di  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ .