

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino l'operatore lineare $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare: $\dim(\text{Im } L) =$ $\dim(\text{Ker } L) =$
- (b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im } L$:
- (c) Determinare una base per il sottospazio $\text{Ker } L$:
- (d) Determinare: $L(\text{Span}(\mathbf{v})) =$
- (e) Stabilire se il vettore \mathbf{v} è un autovettore di L .

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro k :

$$\begin{cases} (k-1)x + (2-3k)y + z + t = 4 \\ -2x + (5-k)y + (k+1)z + 2t = 6 \\ x - (2+k)y + (k-1)z + t = 1 \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di k per cui il sistema ammette soluzioni:
- (b) Per quali valori di k la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2:
- (c) La soluzione generale del sistema per $k = 3$:

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori della matrice A , con le corrispondenti molteplicità algebriche:
 - (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A :
 - (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.
-

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si considerino i punti $U = (2, -2, 0)$ e $V = (0, -3, 1)$. Determinare:

- (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori \overrightarrow{OU} e \overrightarrow{OV} :
 - (b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (2, 1, 1)$:
 - (c) La distanza di π da Q :
 - (d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dall'origine del riferimento O :
-

5. Si considerino il sottospazio U di \mathbb{R}^4 ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (a) $\dim U =$ $\dim U^\perp =$
 - (b) Una base ortogonale di U .
 - (c) Le equazioni cartesiane di U^\perp .
 - (d) La proiezione ortogonale su U del vettore \mathbf{v} .
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2, si consideri il seguente sottoinsieme:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è autovettore di } A \}.$$

1. Verificare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in U$, determinare l'autovalore relativo a \mathbf{v} .
2. Verificare che per ogni matrice $A \in U$, si ha $A^n \in U$, per ogni intero $n \geq 2$.
3. Verificare che U è un sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
4. Determinare una base per U .