

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino l'operatore lineare $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare: $\dim(\text{Im } L) = \dim(\text{Ker } L) =$
- (b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im } L$:
- (c) Determinare una base per il sottospazio $\text{Ker } L$:
- (d) Determinare: $L(\text{Span}(\mathbf{v})) =$
- (e) Stabilire se il vettore \mathbf{v} è un autovettore di L .

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} (3-h)x + y + (3h-8)z - t = 3 \\ -x + (h-3)y + hz - t = 0 \\ 2x + (h-1)y + (h-7)z - 2t = 4 \end{cases}$$

Determinare:

- (a) I valori di h per cui il sistema ammette soluzioni:
- (b) Per quali valori di h la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2:
- (c) La soluzione generale del sistema per $h = -1$:

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori della matrice A , con le corrispondenti molteplicità algebriche;
 - (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A ;
 - (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.
-

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, si considerino i punti $U = (2, 0, -1)$ e $V = (2, -2, 0)$. Determinare:

- (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori \overrightarrow{OU} e \overrightarrow{OV} ;
 - (b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (-1, -1, -1)$;
 - (c) La distanza di π da Q ;
 - (d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{11}$ dall'origine del riferimento O .
-

5. Si considerino il sottospazio U di \mathbb{R}^4 ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (a) $\dim U = \dim U^\perp =$
 - (b) Una base ortogonale di U .
 - (c) Le equazioni cartesiane di U^\perp .
 - (d) La proiezione ortogonale su U del vettore \mathbf{v} .
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 gennaio 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissate in \mathbb{R}^3 la base $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e in \mathbb{R}^2 la base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che rispetto alle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 si rappresenta con
la seguente matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare:

1. Le coordinate del vettore \mathbf{v} rispetto alla base \mathcal{B}_1 .
2. Le coordinate di $L(\mathbf{v})$ rispetto alla base \mathcal{B}_2 .
3. Il vettore $L(\mathbf{v})$.
4. La matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .