CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker} L) =$

   (b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) =$

   (e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} 2x - (k+4)y + (2-k)z - 2t = 6 \\ kx + (1-3k)y + z - t = 4 \\ -x + (3-k)y - kz - t = 1 \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) I valori di k per cui il sistema ammette soluzioni:

   (b) Per quali valori di k la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2:

   (c) La soluzione generale del sistema per $k = 4$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

   (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $U = (2, -2, 0)$ e $V = (3, 0, -1)$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (-1, -2, -1)$:

   (c) La distanza di π da Q:

   (d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dall'origine del riferimento O:

---

5. Si considerino il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} =$

   (b) Una base ortogonale di U.

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$.

   (d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Siano $\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ ed $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare tale che:

$$L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2+h \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e } L(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

1. Le immagini dei vettori della base canonica.
2. La matrice A rappresentativa di L nella base canonica.
3. La matrice A' rappresentativa di L prendendo come base nel dominio e nel codominio
$$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\}.$$
4. Per quale/i valori di h la matrice A' è diagonalizzabile.