CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice quadrata A ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{Ker} L) =$

   (b) Determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Determinare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare: $L(\operatorname{Span}(\boldsymbol{v})) =$

   (e) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h:

$$\begin{cases} x + (2-h)y + (5-h)z + t = 0 \\ (2-h)x + y + (7-3h)z + t = 3 \\ -2x + (4-h)y - (2+h)z + 2t = 4 \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) I valori di h per cui il sistema ammette soluzioni:

   (b) Per quali valori di h la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2:

   (c) La soluzione generale del sistema per $h = 3$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

   (c) Dire se la matrice è diagonalizzabile, giustificando la risposta. In caso affermativo, proporre una matrice N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $U = (1, 2, 0)$ e $V = (0, 2, -2)$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine O generato dai vettori $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare al piano π e passante per $Q = (1, -1, -1)$:

   (c) La distanza di π da Q:

   (d) I punti di r che hanno distanza $\sqrt{11}$ dall'origine del riferimento O:

---

5. Si considerino il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^\perp =$

   (b) Una base ortogonale di U.

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

   (d) La proiezione ortogonale su U del vettore $\boldsymbol{v}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 gennaio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissata la matrice quadrata di ordine 2 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, considerare il seguente sottoinsieme di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$:

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \operatorname{tr}(MA) = 0\},$$

dove $\operatorname{tr}(MA)$ indica la traccia della matrice MA.

1. Verificare che se $A, B \in \mathcal{U}$, anche $(A + B) \in \mathcal{U}$, e che, per qualunque numero reale α, $\alpha A \in \mathcal{U}$.
2. Mostrare che $\mathcal{U}$ è un sottospazio vettoriale reale di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
3. Mostrare che l'applicazione $L\colon \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2) \to \mathbb{R}$, tale che $L(A) = \operatorname{tr}(MA)$ é lineare.
4. Determinare la dimensione di $\mathcal{U}$.