Università di Pavia

Facoltà di Ingegneria

Esame di Geometria e Algebra

Prof. F. Bonsante, S. Brivio, F. Bisi

Prova scritta del primo appello invernale 27 gennaio 2010

Soluzioni

Le risposte riportate in colore rosso sono univoche; quelle in colore ciano sono soggette ad un certo grado di arbitrarietà. Se una risposta è riportata in colore magenta è univocamente determinata, ma dipende dalle scelte fatte in precedenza.

1. Fissate le basi standard $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_4\}$ di $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2 + 2\boldsymbol{e}'_4, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_3 - 2\boldsymbol{e}'_4, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = -3\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3.$$

1. Scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
2. Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L)$, $\dim(\operatorname{Ker} L)$
3. Determinare le equazioni $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana:
4. Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$.
5. Sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ h \\ -3 \end{pmatrix}$; per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$?

(a) Le colonne della matrice A_L sono la rappresentazioni nella base di arrivo delle immagini dei vettori della base di partenza; le equazioni che definiscono l'applicazione lineare fornite esprimono proprio quanto ci serve. Pertanto:

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) La dimensione di $\operatorname{Im}(L)$ è il rango della matrice A_L. Notiamo che la terza colonna della matrice si ottiene sommando le prime due e cambiando di segno a tutti gli elementi; il rango è, quindi, al più 2. Siccome la sottomatrice di ordine 2×2 formata dalle prime due righe e due colonne ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1 \cdot 2) = 2 \neq 0,$$

il rango è almeno 2, quindi $\mathrm{rg}(A_L) = 2$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2\,.$$

La dimensione del dominio è $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$; il teorema delle dimensioni ci dà immediatamente che

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(L)) = 3 - 2 = 1\,.$$

(c) Le considerazioni fatte sopra mostrano che le prime due colonne della matrice A_L sono linearmente indipendenti, quindi formano una base per $\mathrm{Im}(L)$. Pertanto

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Le equazioni parametriche per le 4 componenti dei vettori nell'immagine rispetto alla base canonica sono

$$x = \lambda + 2\mu\,, \tag{2a}$$
$$y = -\lambda\,, \tag{2b}$$
$$z = \mu\,, \tag{2c}$$
$$t = 2\lambda - 2\mu\,, \tag{2d}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Eliminando i parametri (basta sostituire $\lambda = -y$ e $\mu = z$, ricavate dalla seconda e terza equazione, nelle altre due), otteniamo le equazioni cartesiane

$$x + y - 2z = 2y + 2z + t = 0\,. \tag{3}$$

(d) Detto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle componenti di un vettore del dominio nella base canonica, il nucleo dell'applicazione è individuato dall'equazione

$$A_L X = xA_L^1 + yA_L^2 + zA_L^3 = 0\,; \tag{4}$$

il sistema di 4 equazioni in 3 incognite (4) deve avere come soluzione uno spazio vettoriale di dimensione $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$, quindi servono solo due righe linearmente indipendenti: possiamo tenere la seconda e la terza, che danno immediatamente

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

cioè, in forma parametrica

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alla stessa soluzione si poteva arrivare facilmente mediante una riduzione di Gauss del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

questo permette di individuare la z come variabile libera e le x ed y come variabili dipendenti (e anche confermare che il rango è 2, essendo presenti due "pivot"). Risolvendo all'indietro abbiamo $2y = 2z$, ossia $y = z$ e $x = -2y + 3z = -2z + 3z = z$; in forma compatta

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases},$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato concludere, quindi, per la base del nucleo

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) Le componenti di $\boldsymbol{v}$ devono soddisfare le equazioni (3), pertanto

$$\begin{cases} k + 2 - 2h = 0 \\ 4 + 2h - 3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$h = -\frac{1}{2} \qquad k = -3.$$

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} x + hy + (1+h)z = 1 \\ (1+h)y + (1+h)z = h \\ 2x - 2y + hz = -h \\ -x + y = 1 - h \end{cases}$$

1. Determinare per quali valori di h il sistema ammette **un'unica** soluzione:
2. Determinare per quali valori di h il sistema **non ammette** soluzioni:

3. Posto $h = 1$, risolvere il sistema.

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1+h \\ 0 & 1+h & 1+h \\ 2 & -2 & h \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ed il vettore colonna dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -h \\ 1-h \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Notiamo che la matrice completa del sistema $\tilde{A} = (A|B)$ è quadrata (4×4): per discutere la risolvibilità del sistema conviene partire determinando il rango di $\tilde{A}$ al variare di h, e, per fare questo calcoliamo immediatamente il determinante della matrice. Semplificheremo i calcoli sfruttando le proprietà del determinante, in particolare cerchiamo di annullare alcuni elementi sommando o sottraendo righe/colonne opportune.

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) &= \begin{vmatrix} 1 & h & 1+h & 1 \\ 0 & 1+h & 1+h & h \\ 2 & -2 & h & -h \\ -1 & 1 & 0 & 1-h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+h & 1+h & 1 \\ 0 & 1+h & 1+h & h \\ 2 & 0 & h & -h \\ -1 & 0 & 0 & 1-h \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 1+h & 1+h & h \\ 2 & 0 & h & -h \\ -1 & 0 & 0 & 1-h \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

sviluppando lungo la seconda colonna

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) &= (1+h) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-h \\ 2 & h & -h \\ -1 & 0 & 1-h \end{vmatrix} = (1+h)h \begin{vmatrix} 1 & 1-h \\ -1 & 1-h \end{vmatrix} \\ &= h(1+h)[(1-h) - (-1)(1-h)] = 2h(h+1)(1-h) \end{aligned} \tag{8}$$

Il determinante si annulla solo per $h = 0$ o $h = \pm 1$. Per tutti gli altri valori di h, il determinante di $(A|B)$ non è nullo, quindi $\text{rg}(\tilde{A}) = 4$ per $h \neq 0, \pm 1$. Poichè la matrice dei coefficienti è di tipo 4×3 il suo rango è al più 3: quindi per $h \neq 0, \pm 1$ il sistema sicuramente *non* è risolvibile.

Studiamo a parte i casi particolari. Per $h = 0$, la matrice dei coefficienti è

$$A(h=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la terza riga è il doppio della quarta cambiato di segno: possiamo eliminarla per il calcolo del rango; resta da determinare il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la prima riga si ottiene dalla differenza fra la seconda e la terza riga; queste ultime sono linearmente indipendenti, quindi

$$\mathrm{rg}(A(h=0)) = 2\,;$$

vediamo ora la matrice completa:

$$\tilde{A}(h=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la sottomatrice formata dalle prime 3 righe e le ultime 3 colonne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo (sviluppare lungo l'ultima riga): il rango è almeno 3, ma non può essere 4 ($\det \tilde{A} = 0$ per $h = 0$), quindi

$$\mathrm{rg}(\tilde{A}(h=0)) = 3\,;$$

allora, $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(\tilde{A})$, e, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non ammette soluzione.

Passiamo ad $h = 1$. La matrice dei coefficienti è

$$A(h=1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene immediatamente che

$$\mathrm{rg}(A(h=1)) = 3$$

Basta calcolare il determinante della sottomatrice formata togliendo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(0-(-2)) = -2 \neq 0\,.$$

Il rango della matrice completa non può essere 4 ($\det \tilde{A} = 0$ per $h = 1$), e non può neanche diminuire; quindi

$$\mathrm{rg}(\tilde{A}(h=1)) = 3\,,$$

ed il sistema ammette soluzioni. La soluzione è unica, perché, in questo caso, la dimensione del nucleo della matrice è nulla ($\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(A) = 3 - 3 = 0$).

Infine, per $h = -1$ abbiamo:

$$A(h = -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene immediatamente che

$$\mathrm{rg}(A(h = -1)) = 2\,.$$

La matrice completa, invece, è

$$\tilde{A}(h = -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è immediato ricavare

$$\mathrm{rg}(\tilde{A}(h = -1)) = 3\,,$$

quindi il sistema non ammette soluzione.

Ricapitolando:

1. Il sistema ammette **un'unica** soluzione per $h = 1$.
2. Il sistema **non ammette** soluzioni per $h \neq 1$.

Risolviamo il sistema per $h = 1$. Procediamo mediante una riduzione di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

risolvendo all'indietro

$$\begin{cases} z = -1 \\ 2y = -2z + 1 = 3 \\ x = -y - 2z + 1 = -y + 3 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ x = -y + 3 = -\dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Scrivere i vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ nella base standard $\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$.
2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente A, B ed O.
3. Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di C su π.
4. Scrivere la decomposizione del vettore $\overrightarrow{OH}$ nella base $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ di π.

(a) La richiesta è banale: le coordinate dei punti sono anche le componenti dei vettori:

$$\overrightarrow{OA} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{k}} \text{ e } \overrightarrow{OB} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$$

(b) Il piano richiesto si ottiene considerando il sottospazio generato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$; le equazioni delle coordinate dei punti del piano π in forma parametrica sono:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,. \tag{9}$$

Eliminando i parametri otteniamo

$$\pi \colon x - 2y - z = 0 \,. \tag{10}$$

(c) Un versore normale al piano π è

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} , \tag{11}$$

la proiezione ortogonale richiesta si ottiene togliendo al vettore $\overrightarrow{OC}$ la sua proiezione parallela ad $\boldsymbol{n}$.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} - \langle \overrightarrow{OC}, \boldsymbol{n} \rangle \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 6 \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

e le componenti del vettore $\overrightarrow{OH}$ sono le cordinate del punto H richiesto.

(d) Scomponiamo il vettore nella base richiesta: si tratta di trovare il valore di λ, μ che soddisfa il sistema (9) con le coordinate di H trovate:

$$\begin{cases} 5 = \lambda + \mu \\ 2 = \mu \\ 1 = \lambda - \mu \end{cases} \tag{12}$$

da cui $\lambda = 3$, $\mu = 2$, ossia

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\,.$$

---

4. Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro k

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & 1 & k+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Si determinino gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche al variare di k-
2. Si determini per quali k la matrice si diagonalizza.
3. Posto $k = -2$, si determini una base di ciascun autospazio.
4. Posto $k = -2$, si determini una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma non sia simile ad A.

(a) La matrice è triangolare, gli autovalori sono gli elementi diagonali:

$$\lambda_a = k^2, \qquad \lambda_b = 1, \qquad \lambda_c = 4\,;$$

- per $k \neq \pm 1, \pm 2$ i tre autovalori sono distinti, ognuno con molteplicità algebrica μ unitaria;
- per $k = \pm 1$, abbiamo $\lambda_1 = 1$ con $\mu_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ con $\mu_2 = 1$;
- per $k = \pm 2$, abbiamo $\lambda_1 = 1$ con $\mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ con $\mu_2 = 2$.

(b) Nel primo caso visto, gli autovalori sono tutti in $\mathbb{R}$, tutti distinti, quindi la matrice A si diagonalizza; vediamo i casi particolari.

Per $k = -2$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

per l'autovalore $\lambda_2 = 4$ il rango di $A - \lambda_2 I$ è :

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

quindi la molteplicità geometrica è $\nu_2 = 3 - 1 = 2 = \mu_2$ e la matrice si diagonalizza (la seconda molteplicità geometrica è almeno 1 e non può superare $3 - \nu_2 = 3 - 2 = 1$, quindi $\nu_1 = 1$).

Per $k = 2$, invece, abbiamo

$$\text{rg}(A - \lambda_2 I) = \text{rg}(A - 4I)\,\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,,$$

quindi $\nu_2 = 3 - 2 = 1 \neq \mu_2 = 2$ e la matrice non si diagonalizza.

Analogamente per $k = \pm 1$.

Concludendo, la matrice si diagonalizza per $k \neq \pm 1, 2$.

(c) Per $k = -2$ determiniamo gli autospazi. Cominciamo con l'autovalore $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I)X = (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \quad ;$$

il rango della matrice dei coefficienti è 2; una base è , dunque:

$$\mathcal{B}(V_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Per l'autovalore $\lambda_2 = 4$

$$(A - 4I)X = (A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

cioè $y = 0$: una base è , dunque:

$$\mathcal{B}(V_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Basta scrivere una matrice triangolare con gli stessi autovalori sulla diagonale, ma che non si diagonalizza:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Infatti,

$$\operatorname{rg}(B - 4I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e $\dim(\operatorname{Ker}(B - 4I)) = 3 - 2 = 1 \neq \mu_2 = 2$.

---

5. Fissati in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il sottospazio:

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y + z = x - y + t = 0 \right\},$$

ed il suo complemento ortogonale $V^\perp$. Determinare:

1. Una base ortonormale di V: $\mathcal{B}_V =$
2. Una base ortonormale di $V^\perp$: $\mathcal{B}_{V^\perp} =$
3. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ contenente $\mathcal{B}_V$: $\mathcal{B}' =$
4. Scrivere la decomposizione del vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}'$:

(a) Riscriviamo le equazioni di V scegliendo x, y come parametri liberi:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu \\ t = -\lambda + \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

prendendo $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$ otteniamo due vettori che formano una base.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I due vettori sono già ortogonali; basta normalizzarli per avere una base ortonormale:

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Determinamo le equazioni di $V^\perp$: basta imporre la perpendicolarità a $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ per i vettori $\boldsymbol{u} \in V^\perp$:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \qquad \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

Usando la rappresentazione sulla base canonica $\mathcal{B}_0$ per $\boldsymbol{u}$:

$$[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - z + t \end{cases},$$

che scriviamo in forma parametrica, scegliendo z, t come variabili libere:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Procedendo come sopra otteniamo

$$\mathcal{B}_{V^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Siccome i due spazi V e $V^\perp$ sono in somma diretta, la base richiesta si ottiene unendo le basi dei due sottospazi:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_{V^\perp} \tag{13}$$

(d) Cerchiamo i quattro scalari $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ che permettono di scrivere

$$X = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{w}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{w}_4 \,,$$

dove i vettori $\boldsymbol{w}_i$ sono quelli della base (13).

Otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che, risolto, ci dà:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali con grado $\leq n$. Si consideri l'applicazione $L\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_5[x]$ data da:

$$L(p(x)) = (x-1)p(x).$$

1. Verificare che L è un'applicazione lineare.
2. Trovare una base per lo spazio $\operatorname{Im} L$.
3. Verificare che $\operatorname{Im} L$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}_5[x]$ dei polinomi che ammettono $x = 1$ come radice.

(a) Siano $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_4[x]$; calcoliamo $L(p(x) + q(x))$:

$$L(p(x)+q(x)) = (x-1)(p(x)+q(x)) = (x-1)p(x)+(x-1)q(x) = L(p(x))+L(q(x))\,;$$

calcoliamo ora $L(\lambda p(x))$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L(\lambda p(x)) = (x-1)\lambda p(x) = \lambda(x-1)p(x) = \lambda L(p(x))\,.$$

Quindi L è lineare.

(b) L'immagine è generata dalle immagini dei vettori della base del dominio $\mathbb{R}_4[x]$; una base dell'anello dei polinomi di grado inferiore o uguale a 4 è:

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}\,.$$

Troviamo l'immagine dei vettori della base:

$$L(\mathcal{B}) = \left\{(x-1),\, x(x-1),\, x^2(x-1),\, x^3(x-1),\, x^4(x-1)\right\}\,.$$

Poichè sono tutti polinomi di grado differente, i vettori di $L(\mathcal{B})$ sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base di $\operatorname{Im}(L)$, che ha dimensione 5.

(c) Ogni vettore dell'immagine è dato da una combinazione lineare di vettori di $L(\mathcal{B})$; per come è costruita, questa combinazione lineare contiene il fattore comune $(x-1)$, quindi il polinomio ottenuto o è il polinomio nullo o ammette la radice $x = 1$.

Sia ora $p(x)$ un polinomio di $\mathbb{R}_5[x]$ che ammette la radice $x = 1$; allora, possiamo scrivere

$$p(x) = (x-1)q(x)\,,$$

dove $\deg(q(x)) \leq 4$, quindi esiste un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ la cui immagine è proprio $p(x)$.

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Considerato lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$ delle matrici quadrate reali di ordine 3, mostrare che il suo sottoinsieme delle matrici simmetriche a traccia nulla

$$T = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid \mathrm{tr}(A) = 0,\ A = A^{\mathrm{T}}\}$$

è un sottospazio vettoriale, e determinarne dimensione ed una base.

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$; allora, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0 + 0 = 0$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$. Quindi T è chiuso rispetto alla somma fra vettori ed alla moltiplicazione per uno scalare, pertanto è un sottospazio vettoriale.

Una matrice generica di T si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

con $a + d + f = 0$, ossia $f = -(a + d)$; così facendo, la matrice è simmetrica. Esistono, quindi, 5 parametri liberi: $\dim(T) = 5$. Una base di T è data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Risolvere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri la seguente matrice A di tipo $(2,3)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trovare una matrice B di tipo $(3,2)$ tale che $A.B = \mathbf{0}_{2,2}$.

   B è unica?

2. Mostrare che l'insieme delle matrici B che soddisfa la relazione $A.B = \mathbf{0}_{2,2}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio reale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3,2)$, e determinarne la dimensione ed una base.

Si riesce anche a scrivere "a occhio"; comunque, lavorando sistematicamente, sia

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\,.$$

La condizione richiesta è

$$
\begin{aligned}
A.B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ a+e & b+f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Otteniamo il sistema di equazioni

$$
\begin{cases} a+c+e=0 \\ b+d+f=0 \\ a+e=0 \\ b+f=0 \end{cases}
$$

da cui abbiamo

$$
\begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ a=-e \\ b=-f \end{cases}
$$

Una possibile matrice B che soddisfa la richiesta è, quindi

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Non è unica: basta prendere, per esempio, $a = 0$, $b = 1$ per avere una matrice ugualmente valida, ma differente.

Le equazioni scritte sopra mostrano che l'insieme delle matrici B è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 (spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, rango della matrice dei coefficienti 4). Una base è data da

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \right\}
$$

Risolvere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trovare una matrice 2×2 non nulla B tale che $A \cdot B = \mathbf{0}_{2,2}$.

2. Mostrare che il sottoinsieme delle matrici B di ordine 2 tali che $A \cdot B = \mathbf{0}_{2,2}$, è un sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ e calcolarne la dimensione.

La soluzione è simile a quella della domanda precedente; una matrice che soddisfi le richieste è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sia

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

una matrice tale che $A.B = \mathbf{0}_{2,2}$; questo si traduce nel sistema

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ -a + c = 0 \\ b - d = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} .$$

È immediato convincersi che due equazioni sono superflue, e le altre indipendenti: quindi la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la dimensione del nucleo dell'applicazione associata, ossia la dimensione del sottospazio vettoriale delle matrici B è $4 - 2 = 2$.

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare $L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

(a) Notiamo che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che conosciamo le immagini degli ultimi due vettori. Per la linearità di L abbiamo

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

(b) Ci servono le immagini dei vettori della base standard del dominio. La definizione di L ci fornisce direttamente $L(\boldsymbol{e}_1)$, e abbiamo appena trovato $L(\boldsymbol{e}_2)$: manca quella del terzo vettore $\boldsymbol{e}_3$. Osserviamo che la terza equazione di definizione di L può essere scritta come

$$L(-2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = -2L(\boldsymbol{e}_1) + L(\boldsymbol{e}_2) + L(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0}_4,$$

da cui $L(\boldsymbol{e}_3) = 2L(\boldsymbol{e}_1) - L(\boldsymbol{e}_2)$. Passando alle rappresentazioni nella base standard di $\mathbb{R}^4$:

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\7\\11\end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice rappresentativa richiesta sono le immagini della base del dominio nella base del codominio, quindi:

$$A_L = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 1 & 3\\3 & -1 & 7\\4 & -3 & 11\end{pmatrix}.$$

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A = \begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}$ una matrice reale simmetrica di ordine 2 con autovalori 2 e 3, e tale che $A \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

1. Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.
2. Determinare la matrice A.

(a) Osserviamo che il testo già ci dice che $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2.

Poichè la matrice ha due autovalori distinti, un autovettore relativo all'altro autovalore si può trovare immediatamente, perchè deve essere ortogonale al primo, e la sua direzione è determinata, poichè la dimensione dello spazio su cui agisce A è 2: possiamo scrivere

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Scriviamo le due equazioni agli autovalori per i due autovettori:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

che si traduce nel sistema per le a, b, c:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 2 \\ a - b = 3 \\ b - c = -3 \end{cases}.$$

Si verifica subito che il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

e, quindi la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Risolvere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri la seguente matrice A di tipo $(2, 3)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trovare una matrice B di tipo $(3, 2)$ tale che $A.B = I_2$.
   B è unica?

2. Verificare che ogni matrice B che soddisfa la relazione $A.B = I_2$, verifica la proprietà:

$$\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}.$$

(a) Sia

$$B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\,.$$

La condizione richiesta è

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c & d+e+f \\ a+c & d+f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

Otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ d+e+f=0 \\ a+c=0 \\ d+f=1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=1 \\ d+f=1 \\ e=-1 \end{cases} \tag{16}$$

Una possibile matrice B che soddisfa la richiesta si ottiene con $a = 1$ e $f = 0$, ed è, quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Non è unica: basta prendere, per esempio, $a = 0$, $f = 1$ per avere una matrice ugualmente valida, ma differente.

(b) Anzitutto, osserviamo che le componenti dei vettori di $\operatorname{Ker} A$ obbedisono alle equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \tag{17}$$

ossia

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad ; \tag{18}$$

in altre parole, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Le matrici B che soddisfano la richiesta del testo sono uno spazio affine traslato; infatti le soluzioni del sistema (16 hanno la forma

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

con $a, d \in \mathbb{R}$ liberi, o, tornando alle matrici

$$B = \begin{pmatrix}a & d\\b & e\\c & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

L'immagine di B è generata dalle colonne della matrice:

$$\operatorname{Im} B = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]\right).$$

Se un vettore è in $\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A$, devono esistere λ, μ, ν tali che

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \mu\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] + \nu\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right],$$

ossia, riordinando

$$(\lambda - a\mu - d\nu)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \nu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

I vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti; infatti, basta calcolare il determinante della matrice M le cui colonne sono i vettori

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

per convincersene. Quindi, l'unica combinazione lineare nulla è quella banale, e in particolare $\mu = \nu = 0$, da cui $\lambda = 0$. In altre parole, l'unico vettore nell'intersezione è il vettore nullo.