ESERCIZI DI GEOMETRIA E ALGEBRA

foglio n. 1

§1. STRUTTURA ALGEBRICA DI $\mathbb{E}^3_0$

esercizio 1

Sia $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base di $\mathbb{E}^3_0$

Si verifichi quali tra le seguenti coppie di vettori hanno la stessa direzione

(a) $\cdot\ \vec{u}_1 \qquad \cdot\ \vec{u}_2$

(b) $\cdot\ \vec{u}_1+\vec{u}_2 \qquad \cdot\ 3\vec{u}_1$

(c) $\cdot\ 3\vec{u}_1+6\vec{u}_2+9\vec{u}_3 \qquad \cdot\ 4\vec{u}_1+8\vec{u}_2+12\vec{u}_3$

(d) $\cdot\ \vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3 \qquad \cdot\ 2\vec{u}_1+4\vec{u}_2+\vec{u}_3$

(e) $\cdot\ 6\vec{u}_1+2\vec{u}_2-10\vec{u}_3 \qquad \cdot\ 15\vec{u}_1+5\vec{u}_2-25\vec{u}_3$

(f) $\cdot\ (2+\sqrt{3})\vec{u}_1+\vec{u}_2 \qquad \cdot\ \vec{u}_1+(2-\sqrt{3})\vec{u}_2$

[RISP. : (c), (e), (f)]

esercizio 2

Sia $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base di $\mathbb{E}^3_0$

Si dica quali fra i seguenti insiemi di vettori formano una base di $\mathbb{E}^3_0$

(a) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1+\vec{u}_2\}$ (b) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1+\vec{u}_3\}$

(c) $\{\vec{u}_1+\vec{u}_2, \vec{u}_1-\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ (d) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_1+\vec{u}_2, \vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\}$

(e) $\{\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3, \vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3, \vec{u}_2+\vec{u}_3\}$ (f) $\{\vec{u}_1+\vec{u}_3, \vec{u}_1+\vec{u}_2, \vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\}$

[RISP. : (b), (c), (d), (f)]

esercizio 3

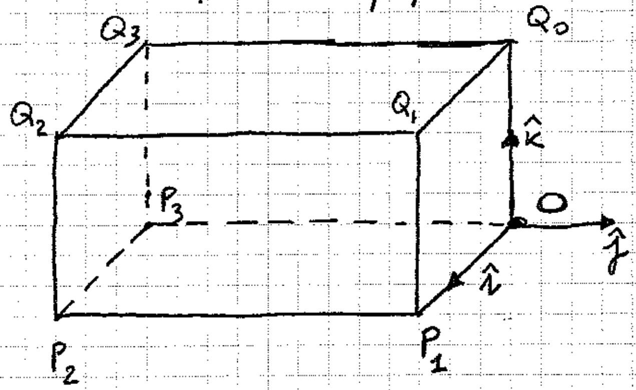
Per ciascuna delle basi determinate nell'esercizio 2 si calcolino le corrispondenti coordinate del vettore

$$\vec{v} = \vec{u}_1+3\vec{u}_2+\vec{u}_3$$

[RISP. : (b) $(0,3,1)$; (c) $(2,-1,1)$; (d) $(-2, 2, 1)$; (f) $(-2,0,3)$]

esercizio 4

Sia $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{E}^3_O$ e si consideri il parallelepipedo in figure



(a) Sapendo che il lato parallelo a $\hat{\imath}$ è lungo $\frac{3}{2}$ il lato parallelo a $\hat{\jmath}$ è lungo 4 e il lato parallelo a $\hat{k}$ è lungo 2, trovare le coordinate dei vertici del parallelepipedo

(b) verificare che i vettori $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OQ_1}$, $\vec{u}_2 = \overrightarrow{OQ_2}$ e $\vec{u}_3 = \overrightarrow{OQ_3}$ formano una base di $\mathbb{E}^3_O$

(c) calcolare le coordinate di $\overrightarrow{OQ_0}$ rispetto a tale base

[RISP. (a) $P_1 = (\frac{3}{2}, 0, 0)$ $P_2 = (\frac{3}{2}, -4, 0)$ $P_3 = (0, -4, 0)$ $Q_0 = (0, 0, 2)$
$Q_1 = (\frac{3}{2}, 0, 2)$ $Q_2 = (\frac{3}{2}, -4, -2)$ $Q_3 = (0, -4, 2)$
(c) $(1, -1, 1)$]

esercizio 5

Sia $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ base di $\mathbb{E}^3_O$ e si considerino i seguenti vettori $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - u_2 + \vec{u}_3$.

Si stabilisca quale fra i seguenti vettori appartiene a $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

(a) $\vec{u}_2$

(b) $\vec{u}_1$

(c) $-\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3$

(d) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

(e) $2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

(f) $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3$

[RISP. (b) $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ (c) $-\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$
(e) $2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = \frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$ (f) $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 = 3\vec{v}_1$]

§2 EQUAZIONI PARAMETRICHE DI RETTE E PIANI

esercizio 1

Si determini ~~per~~ per un fissato sistema di riferimento $\mathcal{R}(O,\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ l'equazione parametrica delle seguenti rette

(a) retta r passante per O con direzione $\vec{v} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$
(b) retta r passante per i punti A e B di coordinate rispettivamente $(1,1,-1)$, $(1,0,1)$.
(c) retta r parallela alla retta r' di equazione parametrica $r': \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 \end{cases}$ e passante per il punto di coordinate $(1,1,1)$.

esercizio 2

Si consideri la retta r di equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases}$$

determinare quali dei seguenti punti appartengono alla retta esplicitando il valore del parametro corrispondente

(a) $(0,0,0)$ (d) $(5,6,-2)$
(b) $(1,0,1)$ (e) $(1,-2,2)$
(c) $(2,0,1)$ (f) $(0,1,-1)$

[RISP: (c) $\alpha=0$ (d) $\alpha=3$ (e) $\alpha=-1$]

esercizio 3

Sia P il punto di coordinate $(1,0,1)$.
Si determini ~~per~~ quali delle seguenti rette espresse in forma parametrica contengono P esplicitando il valore del parametro.

(a) $\begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = -7\alpha \\ z = 1+9\alpha \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = -2+3\alpha \\ y = -2+2\alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases}$

[RISP: (a) $\alpha=0$ (c) $\alpha=1$]

esercizio 4

Stabilire quali delle seguenti triple di punti sono allineati. Per ciascuna tripla di punti allineati determinare poi l'equazione parametrica della retta passante per essi

(a) $P = (1, -1, 1)$ $\quad Q = (1, -1, 0)$ $\quad R = (1, 0, -1)$

(b) $P = (1, 1, 1)$ $\quad Q = (2, 0, 2)$ $\quad R = (-1, 3, -1)$

(c) $P = (0, 2, -1)$ $\quad Q = (0, 1, 1)$ $\quad R = (0, 0, 0)$

(d) $P = (1, 0, 0)$ $\quad Q = (1, 3, 6)$ $\quad R = (1, -3, -9)$

(e) $P = (1, 1, 2)$ $\quad Q = (1, -1, 2)$ $\quad R = (1, 3, 7)$

(f) $P = (2, 3, -7)$ $\quad Q = (4, 5, -5)$ $\quad R = (-1, 0, -10)$

[RISP: (b), (d), (f)]

esercizio 5

Si determini l'equazione parametrica del piano

(a) contenente i punti $(1, -1, 1)$ $\quad (1, -1, 0)$ $\quad (1, 0, -1)$

(b) contenente i punti $(1, 1, 1)$ $\quad (2, 0, 2)$ e parallelo al vettore $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$

(c) parallelo a $\mathrm{span}(\hat{\imath})$ e a $\mathrm{span}(\hat{\jmath})$ e passante per $(1, 0, 0)$

(d) contenente la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

e il punto $O = (0, 0, 0)$

(e) contenente la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

e il punto $P = (1, 0, 0)$

(f) contenente la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

e parallelo a $\mathrm{span}(\hat{\imath})$

esercizio 6

Determinare quali fra i piani del precedente esercizio contengono l'origine

[RISP: (b) (c) (e)]

esercizio 7

Si consideri il piano π di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha + 2\beta \end{cases}$$

(a) si verifichi che il punto $P = (2, 5, 9)$ appartiene a tale piano esplicitando i parametri corrispondenti

(b) si determinino i punti Q e R di intersezione del piano π con le rette coordinate $\mathrm{span}(\hat{\imath})$ e $\mathrm{span}(\hat{\jmath})$

(c) si determini un'equazione parametrica della retta ottenuta come intersezione di π con $\mathrm{span}(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$

(d) determinare esplicitamente i valori dei parametri corrispondenti ai punti Q e R e al punto medio M del segmento di estremi Q e R.

[risp: (a) $\alpha = 3$ $\beta = 2$; (b) $\alpha = 2$ $\beta = -2$ $Q = (5, 0, 0)$; $\alpha = -\frac{4}{3}$ $\beta = -\frac{1}{3}$ ~~R=(~~

$R = \left(0, -\frac{5}{3}, 0\right)$; $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{7}{6}$ $M = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{6}, 0\right)$

esercizio 8

Si considerino le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + 2\alpha' \\ y = 2 + \alpha' + \beta' \\ z = 1 + \alpha' - \beta' \end{cases}$$

(a) verificare che descrivono lo stesso piano π

(b) trovare i parametri α', β' corrispondenti al punto $P \in \pi$ ottenuto dalla prima equazione ponendo $\alpha = 2$ $\beta = 1$

[RISP. (b) $\alpha' = 1$ $\beta' = 0$]