1. Geometria analitica dello spazio I: coordinate, basi, equazioni parametriche di rette e piani

In tutti questi esercizi assumeremo di aver fissato un sistema cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$.

(1) Si determini un'equazione parametrica per la retta passante per il punto P con direzione parallela a $\boldsymbol{v}$, sapendo che le coordinate del punto P e del vettore $\boldsymbol{v}$ sono rispettivamente

- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) Si consideri le seguenti rette parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -4 - 4\alpha \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

Si determini per ciacuna di esse un punto che vi appartiene ed un vettore parallelo ad essa.

(3) Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 descritte nell'esercizio precedente. Si determini se i seguenti punti appartengono ad una o più di tali rette:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) Si determini l'equazione parametrica della retta passante per i punti

- $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Stabilire quali delle rette così trovate sono parallele al versore $\boldsymbol{i}$

(5) Stabilire quali tra le seguenti coppie di equazioni parametriche di rette descrivono la stessa retta

- $\begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ;$

- $\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} x = 3 - 4\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 2 + \frac{1}{2}\alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} x = 5 - 3\alpha \\ y = 7 - 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \alpha \\ y = 1 - \frac{1}{3}\alpha \\ z = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}\alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha \\ z = \frac{4}{3} + \alpha \end{cases}$.

(6) Si determini quali fra le seguenti coppie di vettori sono linearmente indipendenti:

- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(7) Si determini in quali dei seguenti casi $\boldsymbol{w}$ appartiene a $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$

- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(8) Si determini quali fra i seguenti insiemi di vettori sono una base di $\mathbb{E}^3_O$

- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

(9) Si determini per quale valore di k il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2-k \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ dove

- $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(10) Si discuta quando i seguenti punti sono allineati o meno determinando nel primo caso l'equazione parametrica della retta che li contiene, e nel secondo caso l'equazione parametrica dell'unico piano che li contiene:

- $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$;
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(11) Per ciascuna delle seguenti coppie di equazioni parametriche determinare un punto e una giacitura del piano che descrivono. Stabilire inoltre quali coppie di equazioni descrivono lo stesso piano

- $\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = \alpha' + \beta' \\ z = 2 + \alpha - \beta \end{cases}$;

- $\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha + 2\beta \end{cases};$
- $\begin{cases} x = 3 - 4\alpha + \\ y = 1 - 2\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = -1 - \beta \\ z = 2 + \frac{1}{2}\alpha \end{cases};$
- $\begin{cases} x = 5 - \alpha + \beta \\ y = 7 - \alpha + 2\beta \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - 2\beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases};$

(12) Siano P, Q punti nello spazio Euclideo. Detto M il punto medio del segmento con estremi P e Q si verifichi che

$$M = O + \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2}$$

[*Sugg.*: posto $\boldsymbol{v} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ si osservi che $Q = P + \boldsymbol{v}$ per cui $M = P + \boldsymbol{v}/2 \ldots$]

Utilizzando tale formula si determinino le coordinate del punto medio dei segmenti aventi come estremi $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(13) Si consideri il triangolo con vertici $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Detto M il punto medio del lato PQ si determini l'equazione parametrica della retta passante per R e M.
- Detto M' il punto medio del lato PR si determini l'equazione parametrice della retta passante per M' e per Q.
- Si determinino le coordinate del baricentro del triangolo (si ricorda che il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle sue mediane)

(14) Si verifichi che i vettori $\boldsymbol{u}_1 = \hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{u}_2 = \hat{\boldsymbol{j}} + \hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{u}_3 = \hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ sono una base di $\mathbb{E}^3_O$ e si determinino i numeri λ, μ, ν tali che

$$\hat{\boldsymbol{i}} = \lambda \boldsymbol{u}_1 + \mu \boldsymbol{u}_2 + \nu \boldsymbol{u}_3 \,.$$