1. Geometria analitica dello spazio II: prodotto scalare, equazioni cartesiana, posizioni reciproche rette piani

In tutti questi esercizi assumeremo di aver fissato un sistema cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$.

(1) Si determinino l'angolo formato dalle seguenti coppie di vettori:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

(2) Per ciascuna delle seguenti equazioni cartesiane di piani, si determini la corrispondente equazione parametrica:

$$\begin{array}{lll} x+y+z=1 & x-y+2z=3 & 3x+2y-4z=7 \\ x+2y=1 & 3x-2z=1 & x=5 \end{array}$$

(3) Per ciascuna delle seguenti equazioni cartesiane di rette, si determini la corrispondente equazione parametrica

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2y-z=4 \\ 2x-y+7z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-y+6z=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-z=1 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

(4) Per ciascuna delle seguenti equazioni parametriche di piani, si determini la corrispondente equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x=2+\alpha-\beta \\ y=1-2\alpha+3\beta \\ z=4-2\alpha+5\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+\alpha+\beta \\ y=1+\alpha-\beta \\ z=-2\alpha+5\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}\alpha-2\beta \\ y=+2\alpha-\frac{1}{2}\beta \\ z=-2\alpha+3\beta \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1-2\alpha+3\beta \\ z=4-2\alpha+5\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+\alpha-\beta \\ y=2-2\alpha+4\beta \\ z=\alpha-3\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x=\alpha+3\beta \\ y=3+\beta \\ z=1-\alpha+\beta \end{cases}$$

(5) Si considerino i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ di equazione cartesiana rispettivamente

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}y-3z=\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{3}x+\frac{1}{9}y-2z=\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{x}+y-\frac{1}{2}z=0 \qquad x+y-17z=-6,.$$

- Si determini la posizione reciproca tra
  (a) π_1 e π_2;
  (b) π_1 e π_3;
  (c) π_1 e π_4;
  (d) π_2 e π_3;
  (e) π_2 e π_4;
  (f) π_3 e π_4;
- Per ciascuna coppia di piani incidenti determinare un'equazione parametrica per l'intersezione.
- Si determini la posizione reciproca fra le rette così determinate.

(6) Si considerino le rette l_1, l_2, l_3, l_4 di equazione cartesiana rispettivamete:

$$l_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$
$$l_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad l_4 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

- Si determini la posizione reciproca tra
  (a) l_1 e l_2;
  (b) l_1 e l_3;
  (c) l_1 e l_4;
  (d) l_2 e l_3;
  (e) l_2 e l_4;
  (f) l_3 e l_4;
- Per ciascuna coppia di rette incidenti determinare le coordinate del punto di intersezione.
- Per ciascuna coppia di rette complanari si determini l'equazione cartesiana di un piano che le contiene entrambe.

(7) Si considerino le rette l_1, l_2, l_3, l_4 di equazione cartesiana rispettivamete:

$$l_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
$$l_3 : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad l_4 : \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

- Si determini la posizione reciproca tra
  (a) l_1 e l_2;
  (b) l_1 e l_3;
  (c) l_1 e l_4;
  (d) l_2 e l_3;
  (e) l_2 e l_4;
  (f) l_3 e l_4;
- Per ciascuna coppia di rette incidenti determinare le coordinate del punto di intersezione.
- Per ciascuna coppia di rette complanari si determini l'equazione cartesiana di un piano che le contiene entrambe.

(8) Si determini l'equazione parametrica della retta avente direzione perpendicolare ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per l'origine.

(9) Si consideri il piano π di equazione $x + y + z = 1$, e sia r la retta perpendicolare a π passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si determini il punto di intersezione Q di r con π.
- Si determini il valore di h per cui il vettore di coordinate $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è parallelo al piano π.

- Si determini l'equazione cartesiana della retta s passante per Q e avente direzione uguale alla direzione del vettore $\boldsymbol{v}$.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e la retta s.

(10) Si consideri la retta r di equazione cartesiana $x+y+z-1 = x+2y-z = 0$.
- Si determini un'equazione parametrica di r.
- Si determini l'equazione del piano π ortogonale a r passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Si determini il punto di intersezione Q tra il piano π e la retta r.

(11) Si consideri la retta r passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Si determini l'equazione parametrica della retta r.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e ortogonale a r.
- Si determini il punto di intersezione di r con π.
- Si determini la distanza tra R e r.

(12) Si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Si verifichi che tali punti non sono allineati.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente P, Q, R.
- Sia r la retta passante per P e Q, si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r passante per R.
- Si determini un'equazione parametrica per $\pi \cap \sigma$.
- Si determini la distanza di P da σ

(13) Si considerino la retta r passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta s passante per il punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ perpendicolare al piano di equazione $x - z = 0$.
- Si determini un'equazione parametrica di ciascuna retta.
- Si determini la posizione reciproca tra r e s.
- Si determini un vettore $\boldsymbol{v}$ ortogonale ad entrambe le rette r e s.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo al vettore $\boldsymbol{v}$.
- Si determini l'intersezione di π con s.