Esercizio 1 Per ciascuna delle seguenti applicazioni, si stabilisca dominio, codominio, e si discuta se l'applicazione è lineare. Per le applicazioni lineari della lista, si determini la matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche.

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y+z\end{pmatrix}\quad L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x+5y\quad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y+1\\x+y+2z\end{pmatrix}$$
$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}\quad L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+2y\quad L(x)=\begin{pmatrix}x\\2x\\7x\end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Si considerino le seguenti applicazioni lineari.

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y+z\\x+z\end{pmatrix}\qquad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+z\\y+z\\x+z\end{pmatrix}\qquad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+z+t\\3x+y+4z+t\\x-9y-z+5t\end{pmatrix}$$
$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+7z\\-x+y+z\\x+y+7z\\x-y-z\end{pmatrix}\quad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y+2z-t\\x+3y-z+t\\2x+11y-6z+5t\end{pmatrix}\quad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\-x+y-z\\2x+3y+4t\\x+y+3z\end{pmatrix}.$$

Per ciascuna di esse
(1) si determini dominio e codominio;
(2) si determini la matrice associata rispetto alle basi canoniche;
(3) si determini una base del nucleo e dell'immagine;
(4) si discuta se sono iniettive e o suriettive.

Esercizio 3 Si considerino le seguenti matrici

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\5&4&1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&0&1&-1\\2&1&0&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&2\\2&1&3&-1\end{pmatrix}$$
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\2&1&0&3\\-1&1&3&-9\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&1&1\\1&2&-4\\-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1&1\\2&4&3&0&3\\3&6&4&-1&6\end{pmatrix}$$

Per ciascuna matrice
(1) si determini dominio e codominio dell'applicazione L_A;
(2) si determini l'immagine del vettore $\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ tramite L_A;
(3) si determini un base del nucleo e dell'immagine di L_A.

Esercizio 4 Sia $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $L(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, L(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, L(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

(1) $L\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}=$
(2) si determini la matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche;
(3) si determini una base di $\ker L$

Esercizio 5 Si consideri la seguente applicazione lineare

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

(1) Si discuta se l'applicazione è iniettive e/o suriettiva.

(2) Si determini un vettore X la cui immagine sia $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(3) Si discuta se è possibile trovare due vettori distinti X, Y le cui immagini siano entrambe $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizo 6 Si considerino le seguenti matrici dipendenti dal parametro h

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Si determini al variare di h la dimensione di $\ker L_A$ e di ImL_A;

(2) Si determini per quali h l'applicazione è iniettiva;

(3) Si determini per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di L_A.

Esercizio 7 Si considerino le seguenti matrici dipendenti dal parametro h.

$$A = \begin{pmatrix} 3+h & 1 & 1 \\ 3+h & h-1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1-h & 1 & 1+h \\ -h & 0 & h \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & h \\ -1 & h \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} h+2 & 0 & 1 & h \\ 2 & h^2 & 1 & 1 \\ 1 & -h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2h & 1 & h \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} h & h+1 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 & h+1 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna di esse

(1) Si determini dominio e codominio di L_A;

(2) Si determini $\dim \ker L_A$ e $\dim ImL_A$ al variare di h;

(3) Si discuta per quali valori del parametro l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 8 Si discuta se ciascuna delle seguenti frasi è vera o è falsa:

(1) Non ci sono applicazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ suriettive;

(2) Tutte le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ sono suriettive;

(3) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva allora è anche suriettiva.

(4) Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva allora è anche suriettiva.

(5) Se la dimensione dell'immagine di un'applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è 2 allora L è iniettiva;

(6) Se la dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è 1 allora L non è iniettiva.

(7) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare, allora l'equazione $L(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette sempre un'unica soluzione.

(8) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare, allora l'equazione $L(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette soluzione se e solo se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di L.

(9) Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare suriettiva, allora l'equazione $L(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette al massimo una soluzione.

(10) Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare iniettiva, allora l'equazione $L(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette al massimo una soluzione.

(11) L'immagine di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ può essere la retta di equazione $x + y = 1$.

(12) Se il nucleo di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una retta passante per l'origine, allora l'immagine di L è la retta ortogonale.

Esercizio 9 Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

e sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$L(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ L(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \ L(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Si determini

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$L\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} =$$

Esercizio 10 Si ripeta l'esercizio precedente ponendo

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Esercizio 11 Si determini l'equazione cartesiana di ciascuno dei seguenti sottospazi:

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$$

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix}\right) \quad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\4\\0\end{pmatrix}\right).$$

Esercizio 12 Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y+z\\x-z\\2x+y+z\end{pmatrix}$

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Per ciascuno di questi sottospazi

(1) Si discuta se V è in somma diretta con $\ker L$.
(2) Si determini una base dell'immagine di V.
(3) Si discuta se $L(V) = ImL$.

Esercizio 13 Si consideri l'applicazione lineare dell'esercizio precedente. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro h definito da

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\h\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\h\\0\end{pmatrix}\right)$$

(1) Si determini la dimensione di V al variare di h.
(2) Si determini la dimensione di $L(V)$ al variare di h.
(3) Si determini la dimensione di $\ker L \cap V$ al variare di h.

Esercizio 14 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

$$V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} | z = t = 0\right\} \qquad V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} | z = 0\right\}$$

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-3\\4\\6\end{pmatrix}\right) \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Per ciascuno di essi

(1) Si stabilisca se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la cui immagine sia V.
(2) In caso affermativo si determini una tale applicazione lineare

Esercizio 15 Si considerino i sottospazi definiti nell'esercizio precedente. Per ciascuno di essi

(1) Si determini se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ il cui nucleo sia V.
(2) In caso affermativo si determini una tale applicazione.

Esercizio 16 Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \mathcal{D} = \left\{\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \qquad L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\y-z\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\y+3z\end{pmatrix} \qquad L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+z\\x-y-z\end{pmatrix} \qquad L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+3z\\x+2y+3z\end{pmatrix}$$

si determino:

(1) La matrice rappresentativa di L prendendo in partenza e in arrivo le basi canoniche;
(2) La matrice rappresentativa di L prendendo in partenza la base $\mathcal{B}$ e in arrivo la base canonica;
(3) La matrice rappresentativa di L prendendo in partenza la base canonica ed in arrivo la base $\mathcal{D}$;
(4) La matrice rappresentativa di L prendendo in partenza la base $\mathcal{B}$ ed in arrivo la base $\mathcal{D}$.

Esercizio 17 Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ le basi definite nell'esercizio precedente. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che la sua matrice rappresentativa nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$