Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si calcoli $\det A$:
- Si calcoli $\det 2A$:
- Si calcoli $\det(A^3)$:

Svolgimento:

Sviluppo il determinante lungo la prima colonna e ottengo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ora il terzo e il quarto addendo in questa somma sono evidentemente nulli in quanto sono determinanti di matrici con righe dipendenti. Inoltre osserviamo che le marici $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ hanno tutte le righe tranne la prima uguali. Per cui otteniamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1 & 2-1 & 2-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Del resto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 + 0 = 6$$

Per cui $\det A = 6$.

Del resto $\det(2A) = 2^4 \det A = 16 \cdot 6 = 96$.

Infine per la regola di Binet si ha che $\det(A^3) = \det(A \cdot A \cdot A) = (\det A)(\det A)(\det A) = 6^3 = 216$.

Procedimento alternativo per calcolare $\det A$*:*

Per le proprietà del determinante $\det A$ è uguale al determinante della matrice ottenuta sottraendo all'ultima riga di A la prima riga. Ovvero

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Sottraendo ora la prima riga dalla terza si ottiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Infine sottraendo la prima riga dalla seconda si ottine

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- Si calcoli $\det A$;
- Si calcoli l'inversa di A.

Svolgimento:

Sottraendo dalla seconda riga la prima riga moltiplicata per 2 si ottiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Sottraendo dalla quarta riga la prima riga moltiplicata per 3 si ottiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Sottraendo dalla terza riga la seconda si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Infine sottraendo dalla quarta riga la seconda si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E dunque si ricava facilemnte che $\det A = 1$.

Calcoliamo ora l'inversa della matrice A. Indichiamo con X^1, X^2, X^3, X^4 le colonne incognite della matrice A^{-1}. Sappiamo da quanto visto in teoria che le colonne X^i devono soddisfare l'equazione

$$AX^i = e_i$$

dove e_i è l' i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

In particolare X^1 è soluzione delle

$$AX^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Posto $X^1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ si ha che l'equazione (1) è equivalente al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Analogamente le componenti di X^2, X^3, X^4 soddisfano rispettivamente i sistemi

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 0 \\ 2x & +3y & +2z & +3t & = 1 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & & +2t & = 0 \\ 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & y & +3z & -t & = 1 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & & +2t & = 0 \\ 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 1 \end{cases}$$

Per prima cosa calcoliamo X^1. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 0 \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per 2 si ottiene

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ & y & +2z & -t & = -2 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ 3x & +4y & +2z & +6t & = 0 \end{cases}$$

Sottraendo dalla quarta equazione la prima moliplicata per 3 si ottiene

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ & y & +2z & -t & = -2 \\ & y & +3z & -t & = 0 \\ & y & +2z & & = -3 \end{cases}$$

Sottraendo dalla terza equazione la seconda si ottiene

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ & y & +2z & -t & = -2 \\ & & z & & = 2 \\ & y & +2z & & = -3 \end{cases}$$

Sottraendo dalla quarta equazione la seconda

$$\begin{cases} x & +y & & +2t & = 1 \\ & y & +2z & -t & = -2 \\ & & z & & = 2 \\ & & & t & = -1 \end{cases} \tag{3}$$

La soluzione di questo sistema è facilmente ricavabile ed è

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = -7 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow X^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva per risolvere il sistema (2), l'abbiamo ridotto nella forma (3) che risulta facilmente risolubile. Osserviamo che la strategia usata per ridurre il sistema da (2) alla forma (3) non dipende dai termini noti del sistema ma solo dai coefficienti che moltiplicano le incognite. Ciò vuol dire che ogni volta che abbiamo un sistema con gli stessi coefficienti di (2) (ma con termini noti diversi), possiamo ridurlo ad un sistema che ha gli stessi coefficienti di (3) (ma termini noti diversi!)

Siccome per trovare X^2, X^3, X^4 dobbiamo risolvere sistemi con gli stessi coefficienti di (2) allora possiamo replicare per ciascuno di essi la stessa sequenza di semplificazioni. Per brevità consideriamo la seguente scrittura

$$
\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & X^2 & X^3 & X^4 \\
x & +y & & +2t = 0 & 0 & 0 \\
2x & +3y & +2z & +3t = 1 & 0 & 0 \\
 & y & +3z & -t = 0 & 1 & 0 \\
3x & +4y & +2z & +6t = 0 & 0 & 1
\end{array}
\tag{4}
$$

Per trovare X^2 dobbiamo risolvere il sistema in cui utilizziamo come termini noti quelli sulla prima colonna, per ottenere X^3 utilizziamo come termini noti quelli sulla seconda colonna e infine per ottenere X^4 utilizziamo come termini noti quelli sull'ultima colonna.

Dunque l'espressione (4) contiene sinteticamente i tre sistemi che dobbiamo risolvere per trovare X^2, X^3 e X^4. Possiamo dunque riapplicare le stesse semplificazioni fatte per ottenere X^1: sottraiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per due e otteniamo

$$
\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & X^2 & X^3 & X^4 \\
x & +y & & +2t = 0 & 0 & 0 \\
 & y & +2z & -t = 1 & 0 & 0 \\
 & y & +3z & -t = 0 & 1 & 0 \\
3x & +4y & +2z & +6t = 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Sottraiamo dalla quarta equazione la prima moltiplicata per 3 e otteniamo

$$
\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & X^2 & X^3 & X^4 \\
x & +y & & +2t = 0 & 0 & 0 \\
 & y & +2z & -t = 1 & 0 & 0 \\
 & y & +3z & -t = 0 & 1 & 0 \\
 & +y & +2z & = 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Sottraiamo dalla terza equazione la seconda e si ottiene

$$
\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & X^2 & X^3 & X^4 \\
x & +y & & +2t = 0 & 0 & 0 \\
 & y & +2z & -t = 1 & 0 & 0 \\
 & & z & = -1 & 1 & 0 \\
 & +y & +2z & = 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Sottraiamo dalla quarta equazione la seconda

$$
\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & X^2 & X^3 & X^4 \\
x & +y & & +2t = 0 & 0 & 0 \\
 & y & +2z & -t = 1 & 0 & 0 \\
 & & z & = -1 & 1 & 0 \\
 & & & t = -1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Dunque risulta che X^2, X^3, X^4 sono rispettivamente soluzioni dei sistemi

$$
\left\{\begin{array}{rrrr}
x & +y & & +2t = 0 \\
 & y & +2z & -t = 1 \\
 & & z & = -1 \\
 & & & t = -1
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{rrrr}
x & +y & & +2t = 0 \\
 & y & +2z & -t = 0 \\
 & & z & = 1 \\
 & & & t = 0
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{rrrr}
x & +y & & +2t = 0 \\
 & y & +2z & -t = 0 \\
 & & z & = 0 \\
 & & & t = 1
\end{array}\right.
$$

Da cui

$$
X^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X^4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Mettendo insieme le colonne si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizo 3 Calcolare il rango della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Svolgimento 1 (metodo degli orlati)

Parto orlando la sottomatrice non nulla $A_1 = (a_{11}) = (1)$ di ordine 1. L'orlato $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ottenuto aggiungendo seconda riga e seconda colonna, ha determinante diverso da 0.

Considero dunque gli orlati di A_2. Osserviamo che l'orlato che si ottiene agggiungendo le entrate su terza riga e terza colonna è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questo orlato ha chiaramente determinante 0 (in qunato ha due colonne uguali) e dunque non va bene. Passo allora all'orlato di A_2 ottenuto considerando terza riga e quarta colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

anche in questo caso il determinante è 0 (in quanto la prima riga è uguale alla terza).

Passo allora all'orlato ottenuto considerando terza riga e quinta colonna

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante lungo la seconda riga si ottiene

$$\det A_3 = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(6-4) = -4 \neq 0$$

Poiché $\det A_3 \neq 0$ possiamo considerare gli orlati di A_3. Osserviamo che ce ne sono esattamente 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante del primo rolato. Sottraendo dalla terza riga la prima si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calcoliamo il dterminante del secondo orlato. Sempre sottraendo dalla terza riga la prima si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque tutti gli orlati di A_3 hanno determinante 0. Per cui il rango di A è uguale all'ordine di A ed è dunque uguale a 3.

Svolgimento 2(metodo di semplificazione)

Il rango di una matrice non cambia scambiando le righe o le colonne oppure sommando ad una riga/colonna un multiplo di un'altra riga/colonna. Proviamo ora utilizzando queste operazioni a semplificare la matrice A: Sottraendo dalla seconda riga il doppio della prima, dalla terza riga la prima e dalla quarta riga la prima moltiplicata per 3 si ottiene

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora le prime tre righe della matrice A sono chiaramente indipendenti, mentre la quarta è uguale alla prima. Segue che il rango di A è 3.

Esercizio 4 Si calcoli al variare del parametro h il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & h^2-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento:

Considero la sottomatrice di ordine massimo ottenuta cancellando l'ultima colonna e ne calcolo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché questo determinante è 0 per tutti i valori di h, esso non ci dà informazioni sul rango per nessun valore di h.

Considero allora un'altra matrice di ordine massimo. Ad esempio quella ottenuta cancellando la prima colonna. Sviluppando lungo la terza riga abbiamo

$$\begin{vmatrix} h & 1 & h^2-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 0 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} 1 & h^2-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h & h^2-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = h - (h - (h^2-1)) = h^2 - 1$$

Dunque per $h \neq \pm 1$ questo minore è non nullo. Di conseguenza il rango di A è 3 per ogni $h \neq \pm 1$.

Per $h = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe di questa matrice sono indipendneti mentre la terza è uguale alla prima. Segue che $rg(A) = 2$.

Infine per $h = -1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ancora ha rango 2 (basta vedere il numero di righe indipendenti).

In conclusione

$$rg(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \neq \pm 1 \\ 2 & \text{se } h = \pm 1 \end{cases}$$