PROGRAMMA DEL CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA. A.A. 2010-11

DOCENTE TITOLARE: FRANCESCO BONSANTE

1. Geometria analitica dello spazio

(1) vettori applicati e lo spazio $\mathbb{E}^3_O$:
- operazioni su vettori e proprietà.
- corrispondenza punti vettori: differenza tra due vettori.

(2) rette e piani: equazioni parametriche:
- retta generata da un vettore e descrizione parametrica di rette per l'origine.
- descrizione parametrica di rette non passanti per l'origine.
- piano generato da coppia di vettori indipendenti e descrizione parametrica dei piani per l'origine.
- descrizione parametrica dei piani non passanti per l'origine.

(3) basi di $\mathbb{E}^3_O$ e riferimenti dello spazio:
- basi di $\mathbb{E}^3_O$ e concetto di complanarità.
- spazio generato da una base.
- coordinate di un vettore rispetto ad una base.
- sistema di riferimento dello spazio.

(4) prodotto scalare in $\mathbb{E}^3_O$:
- definizione geometrica.
- proiezione ortogonale: proprietà di linearità.
- prodotto scalare in coordinate.

(5) equazioni cartesiane di piani e rette:
- normale ad un piano ed equazioni cartesiane di piani per l'origine.
- equazioni cartesiane di piani non passanti per l'origine.
- retta come intersezione di piani: equazioni cartesiane delle rette.

(6) passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche e viceversa.

(7) posizioni reciproche di rette e piani.

2. Spazi Vettoriali

(1) spazio $\mathbb{R}^n$: operazioni e proprietà.

(2) spazi vettoriali: assiomi e proprietà.

(3) sottospazi vettoriali:
- sottospazi di $\mathbb{E}^3_O$.
- operazioni su sottospazi: intersezione e somma.
- proprietà dell'intersezione e della somma.

(4) sistemi di generatori:
- combinazioni lineari.
- sottospazio generato.
- nozione di generatori.
- spazi vettoriali finitamente generati: esempio di spazio non finitamente generato.

(5) lineare indipendenza:
- criteri per verificare l'indipendenza.

- problema dell'unicità della decomposizione in combinazione lineare e indipendenza.

(6) basi e coordinate:
- esistenza e unicità delle coordinate.
- proprietà di linearità delle coordinate.
- teorema della base* e sue applicazioni.
- nozione di dimensione.

(7) algoritmo di estrazione e completamento:
- esistenza di basi per spazi finitamente generati.
- dimensione dei sottospazi: limite superiore per la dimensione; sottospazi di dimensione massima.

(8) basi della somma di due sottospazi:
- metodo di calcolo della base del sottospazio somma.
- formula di Grassman* e sue applicazioni.
- somma diretta di due sottospazi.
- somma diretta di molti sottospazi.

3. Matrici

(1) Ordine di una matrice. Elementi di matrice. Indici di riga, indici di colonna. Matrici quadrate.

(2) operazioni di somma e moltiplicazione per scalare di una matrice:
- struttura di spazio vettoriale su $M_{k,n}(\mathbb{R})$.
- base canonica e dimensione di $M_{k,n}(\mathbb{R})$.

(3) prodotto matrice per vettore:
- condizioni per poter effettuare il prodotto.
- proprietà del prodotto.

(4) prodotto matrice per matrice:
- condizioni per effettuare il prodotto.
- proprietà del prodotto (associatività*).
- non commutatività di matrici: esempi.
- regola del prodotto "riga per colonna".

(5) matrici quadrate:
- matrice identità.
- matrici invertibili.
- risolubilità dell'equazione $AX = b$ e invertibilità di A.
- calcolo dell'inversa di matrici invertibili come risoluzione di n sistemi lineari.
- invertibilità di A in termini delle colonne di A.
- matrici di cambiamento di base (caso da base canonica a base qualsiasi e viceversa).
- matrici di cambiamento di base (caso generale)**.

(6) operazione di trasposizione:
- proprietà.
- trasposta del prodotto.
- invertibilità di A^T.

(7) funzione determinante:
- regola dello sviluppo di Laplace*.
- proprietà del determinante.
- regola di Binet*
- determinante e invertibilità.
- matrici triangolari: calcolo del determinante.
- calcolo del determinante tramite operazioni su righe e colonne.

(8) rango di una matrice:
- proprietà del rango.

- rango massimo di una matrice.
- minori di una matrice: calcolo del rango utilizzando il criterio dei minori.
- $rg(A) = rg(A^T)$.
- calcolo del rango tramite operazioni su righe e colonne di una matrice.
- discussione del rango di una matrice parametrica.

4. Applicazioni lineari

(1) funzioni tra insiemi:
- iniettività.
- suriettività.

(2) applicazioni lineari:
- applicazioni lineari tra spazi $\mathbb{R}^n$: espressione in coordinate.
- applicazioni lineari tra spazi $\mathbb{R}^n$: espressione matriciale.
- immagine di un'applicazione lineare e problema della suriettività.
- immagine di un sottospazio.
- nucleo di un'applicazione lineare e problema dell'iniettività.
- formula della dimensione* e applicazioni.

(3) costruzione di applicazioni lineari tra spazi vettoriali:
- esistenza e unicità di applicazione lineare con valori assegnati su una base qualsiasi.
- le immagini dei vettori di una qualsiasi base costituiscono generatori del sottosapzio immagine.
- costruzione dell'equazione cartesiana di un qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

(4) matrice associata ad un'applicazione lineare in basi qualsiasi:
- costruzione della matrice a partire dall'applicazione e da una base in partenza e una base in arrivo.
- ricostruzione dell'applicazione a partire dalla matrice.

(5) isomorfismi:
- condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali dati.
- condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un'applicazione lineare suriettiva tra due spazi vettoriali dati.
- condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un isomorfismo tra due spazi vettoriali dati.

5. Sistemi lineari

(1) formulazione vettoriale di un sistema lineare. Matrice dei coefficienti e matrice completa.

(2) risolubilità di un sistema lineare. Teorema di Rouchè Capelli.

(3) insieme di soluzioni di sistemi lineari:
- caso omogeneo: sottospazio vettoriale.
- caso non omogeneo: varietà lineare.
- dimensione dell'inisieme delle soluzioni.
- descrizione parametrica della soluzione generale di un sistema (sia caso omogeneo che caso non omogeneo).

(4) metodo di risolubilità:
- sistemi quadrati invertibili: formula di Cramer**.
- sistema generale: scelta dei parametri.
- metodo di semplificazione della matrice (Gauss).

(5) discussione di risolubilità di sistemi dipendenti da parametro.

6. Operatori lineari

(1) esempi geometrici di operatori lineari.

(2) autovettori e autovalori:
  - definizione di autovettore e autovalore.
  - definizione di autospazi.
  - calcolo di autovettori e autovalori e autospazi per operatori lineari di $\mathbb{R}^n$: il polinomio carateristico.
  - traccia e determinante di una matrice quadrata e coefficienti del polinomio caratteristico.
  - calcolo degli autovalori di una matrice triangolare.
  - molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore: relazione di ordine tra le due*.

(3) diagonalizzabilità:
  - il problema delle basi composte da autovettori.
  - espressione di un operatore lineare nelle coordinate corrispondenti ad una base formata da autovettori.
  - criterio di diagonalizzabilità per le matrici: la somma delle molteplicità geometriche deve essere pari alla dimensione dello spazio.
  - criterio necessario per la diagonalizzabilità: tutti gli autovalori devono essere regolari.
  - ricerca di una base di autovettori per matrici diagonalizzabili.

(4) similitudine di matrici:
  - relazione di similitudine.
  - significato geometrico della similitudine.
  - diagonalizzabilità e similitudine.
  - condizioni necessarie per la similitudine.
  - condizioni sufficienti per la similitudine di matrici diagonalizzabili.

7. Prodotto scalare

(1) prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e sue proprietà:
  - espressione matriciale del prodotto scalare.
  - proprietà distributiva, proprietà di omogeneità, positività.
  - disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

(2) norma, distanza e angolo tra due vettori:
  - norma e disuguaglianza triangolare.
  - distanza.
  - angoli tra due vettori.

(3) sistemi ortogonali/ortonormali:
  - passaggio da un sistema ortogonale ad uno ortonormale.
  - sistemi ortogonali sono indipendenti.
  - coefficienti di Fourier e proiezioni ortogonali: proprietà.
  - basi ortogonali: le coordinate coincidono con i coefficienti di Fourier.
  - ricerca di base ortogonale di un sottospazio. Algoritmo di Gram-Schmidt.
  - completamento di sistema ortogonale a base ortogonale.

(4) complemento ortogonale:
  - criterio per verificare appartenenza al complemento ortogonale.
  - basi di U ed equazioni di $U^\perp$: dimensione di $U^\perp$.
  - $(U^\perp)^\perp = U$.
  - basi di $U^\perp$ ed equazioni di U.
  - ricerca dell'equazione cartesiana di un sottospazio utilizzando il complemento ortogonale.

(5) matrici simmetriche e teorema spettrale:
  - formula della trasposta $X \cdot (AY) = Y \cdot (A^T X)$.
  - matrici simmetriche.
  - se A è simmetrica, autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

- teorema spettrale *.

8. Forme quadratiche

(1) esempi di forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$.
(2) classificazione delle forme quadratiche in base al segno.
(3) matrice simmetrica Q associata ad una forma quadratica:
  - metodo di calcolo della matrice.
  - relazione tra la matrice e la forma quadratica.

(4) espressione della forma quadratica nelle coordinate rispetto ad una base ortonormale di autovettori di Q:
  - forma canonica.
  - discussione del segno.

(5) discussione del segno di una forma quadratica dipendente da parametro.

(*) argomento di cui non è necessario conoscere la dimostrazione.
(**) argomento facoltativo.