CORSO DI GEOMETRIA ED ALGEBRA ii

Anno Accademico 2009-2010

Docente: Sonia Brivio

Dipartimento di Matematica, Universitá di Pavia, strada Ferrata 1, Pavia.

PROGRAMMA DEL CORSO

1. **Strutture algebriche e polinomi.**

   Strutture algebriche: gruppi abeliani, anelli, campi. Anello dei polinomi a coefficienti reali. Il teorema fondamentale dell' Algebra (solo enunciato).

2. **Spazi vettoriali.**

   Definizione di spazio vettoriale reale. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, lo spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in O, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell indeterminata x. Sottospazi vettoriali: definizione di sottospazio, criterio per stabilire se un sottoinsieme é un sottospazio, sottospazio generato da n vettori: $span(v_1, , v_n)$. Spazi vettoriali finitamente generati. Definizione di dipendenza ed indipendenza lineare. Definizione di base di uno spazio finitamente generato. Proprietá fondamentale della base. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato (solo enunciato). Due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi (solo enunciato). Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Definizione di isomorfismo di spazi vettoriali. Uno spazio vettoriale reale di dimensione n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Operazioni con i sottospazi: l' intersezione di due sottospazi é un sottospazio, l' unione di due sottospazi non é un sottospazio. Definizione di somma di sottospazi e di somma diretta. Teorema di Grassmann (solo enunciato).

3. **Geometria analitica.**

   Lo spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in un punto O. Riferimento cartesiano ortogonale monometrico $R.C.(O, i, j, k)$, coordinate cartesiane di un punto, traslazione di sistemi di riferimento. Equazioni parametriche di rette e piani: direzione di una retta, retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati. Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{E}^3_O$ e proprietá. Significato geometrico e proiezioni ortogonali. Espressione del prodotto scalare in componenti. Applicazione: calcolo della distanza di due punti.

Equazione cartesiana del piano, vettore normale al piano, giacitura del piano, parallelismo di piani. Equazioni cartesiane della retta, parallelismo tra rette, parallelismo retta-piano, perpendicolaritá retta-piano. Fascio proprio di piani e fascio improprio di piani. Posizione reciproca di due rette: rette complanari e rette sghembe. Calcolo della distanza punto-retta, punto-piano. Prodotto vettoriale in $\mathbb{E}^3_O$. Equazione della sfera. Piano tangente ad una sfera.

4. **Matrici.**

   Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ delle matrici di tipo (m, n) ad elementi in $\mathbb{R}$. Trasposta di una matrice. Matrici diagonali, triangolari e simmetriche. Prodotto di matrici righe per colonne per matrici compatibili. Proprietá del prodotto di matrici nell' anello $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$. Definizione di determinante di una matrice quadrata. Teorema di Laplace (solo enunciato), calcolo del determinante con la regola di Laplace. Proprietá elementari del determinante. Teorema di Binet (solo enunciato). Definizione di rango di una matrice. Relazione tra il rango di A ed il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da A. Teorema di Kronecker (solo enunciato). Definizione di matrice invertibile. Unicitá dell' inversa di una matrice. Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$. Costruzione dell' inversa di una matrice (non dimostrato). Matrice associata ad un cambiamento di base in uno spazio vettoriale. Una matrice é invertibile se e solo se il suo determinante é non nullo. Definizione di matrice ortogonale in $GL(n, \mathbb{R})$. Condizioni sulle righe affinché una matrice sia ortogonale. Il gruppo $O(n)$. Le matrici ortogonali di ordine due.

5. **Applicazioni lineari.**

   Definizione di applicazione lineare ed operatore lineare tra due spazi vettoriali. Definizione di nucleo e immagine di una applicazione lineare: nucleo e immagine sono sottospazi. Il Teorema delle dimensioni (dimostrazione facoltativa). Proprietá di una applicazione: iniettivitá e suriettivitá. Una applicazione lineare é univocamente determinata dalle immagini dei vettori di una base B. Definizione di matrice rappresentativa di una applicazione lineare L rispetto alle basi fissate nel dominio e codominio. Espressione di L, calcolo di $\ker L$ e rango di L con la matrice rappresentativa. Definizione di composizione di due applicazioni lineari e di inversa di una applicazione lineare. Matrici associate alla composizione di applicazioni e all' inversa (solo enunciato). Sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali: definizione di matrice associata A, scrittura matriciale, soluzioni del sistema e compatibilitá. Sistema lineare omogeneo: descrizione dello spazio vettoriale delle soluzioni. Sistemi lineari non omogenei: Teorema di Rouché-Capelli, descrizione della varietá lineare delle soluzioni del sistema, teorema di Cramer (solo enunciato). Matrici simili. Invarianti per similitudine.

6. **Autovalori di un endomorfismo e diagonalizzazione.**

   Definizione di autovalore ed autovetture di un endomorfismo. Definizione di autospazio associato ad un autovalore, autospazi distinti sono in somma diretta. Ricerca degli autovalori: $det(A-tI)=0$. Definizione di polinomio caratteristico di una matrice A, equazione caratteristica e spettro. Il polinomio caratteristico é invariante per similitudine. Definizione di polinomio caratteristico di un endomorfismo. Espressione e proprietá del polinomio caratteristico (dimostrato solo per $n=2$). Definizione di molteplicitá algebrica e geometrica di un autovalore: relazione tra esse. Definizione di autovalore regolare. Definizione di endomorfismo diagonalizzabile e matrice diagonalizzabile. Un endomorfismo L é diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori di L. Criteri di diagonalizzazione di un endomorfismo L di V: L é diagonalizzabile se e solo se V é somma diretta degli autospazi di L; L é diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico é totalmente decomponibile e ogni autovalore é regolare (dimostrazione facoltativa). Condizione sufficiente per la diagonalizzazione di L.

7. **Struttura metrica in $\mathbb{R}^n$.**

   Definizione di prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma di un vettore, di angolo formato da due vettori, di vettori ortogonali e di versori. Disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e triangolare. Definizione di base ortogonale e ortonormale e proprietá relative. Teorema di Gram-Schmidt (solo enunciato). Matrici ortogonali e loro proprietá. Definizione del complemento ortogonale $V^\perp$ di un sottospazio V in $\mathbb{R}^n$ e proprietá. Teorema spettrale per le matrici reali simmetriche(solo enunciato).

8. **Forme quadratiche e applicazioni.**

   Definizione di forma quadratica reale su $\mathbb{R}^n$ e relazione con le matrici reali simmetriche. Forme quadratiche definite positive (negative), semidefinite positive (negative), non definite. Riduzione di una forma quadratica reale a forma canonica. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica sia definita positiva (negativa) o semidefinita positiva (negativa).

Equazioni canoniche di ellisse, iperbole e parabola. Definizione di conica in $\mathbb{E}^2_O$. Coniche degeneri. Matrice associata ad una conica, discriminante di una conica. Teorema di classificazione delle coniche (solo enunciato). Riconoscimento e riduzione a forma canonica di una conica.

Testi consigliati:

- M. Abate, Algebra lineare, Mc Graw-Hill.
- M. Grieco , B. Zucchetti, Algebra lineare e Geometria analitica, Ed. La Goliardica Pavese, Pavia.
- Dispense disponibili in rete.