CORSO DI GEOMETRIA ED ALGEBRA

Anno Accademico 2010-2011

Docente: Sonia Brivio

Dipartimento di Matematica, Universitá di Pavia, strada Ferrata 1, Pavia.

PROGRAMMA DEL CORSO

1. **Strutture algebriche e polinomi.**

   • Strutture algebriche: gruppi abeliani, anelli, campi.

   • Anello dei polinomi a coefficienti reali. Teorema Fondamentale dell' Algebra (solo enunciato).

2. **Spazi vettoriali.**

   • Definizione di spazio vettoriale reale. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, lo spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in O, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell indeterminata x.

   • Sottospazi vettoriali, criterio per stabilire se un sottoinsieme é un sottospazio, sottospazio generato da n vettori.

   • Spazi vettoriali finitamente generati e sistemi di generatori.

   • Dipendenza ed indipendenza lineare.

   • Base di uno spazio finitamente generato. Proprietá fondamentale della base. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato (solo enunciato).

   • Dimensione di uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Isomorfismo tra spazi vettoriali di ugual dimensione.

   • Operazioni con i sottospazi: l' intersezione di due sottospazi é un sottospazio, l' unione di due sottospazi non é un sottospazio. Somma di sottospazi e somma diretta. Teorema di Grassmann (solo enunciato).

3. **Geometria analitica.**

   • Lo spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in un punto O. Riferimento cartesiano ortogonale monometrico $R.C.(O, i, j, k)$, coordinate cartesiane di un punto, traslazione di sistemi di riferimento.

   • Equazioni parametriche di rette e piani: direzione di una retta, retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati.

   • Prodotto scalare in $\mathbb{E}^3_O$ e proprietá. Significato geometrico e proiezioni ortogonali. Espressione del prodotto scalare in componenti. Applicazione: calcolo della distanza di due punti.

   • Equazione cartesiana del piano, vettore normale al piano, giacitura del piano, parallelismo di piani. Equazioni cartesiane della retta, parallelismo tra rette, parallelismo retta-piano, perpendicolaritá retta-piano. Fascio proprio di piani e fascio improprio di piani.

   • Posizione reciproca di due rette: rette complanari e rette sghembe. Calcolo della distanza punto-retta, punto-piano.

4. **Matrici.**

• Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m,n)$ delle matrici di tipo (m,n) ad elementi in $\mathbb{R}$. Trasposta di una matrice. Matrici diagonali, triangolari e simmetriche.

• Prodotto di matrici righe per colonne per matrici compatibili. Proprietá del prodotto di matrici nell' anello $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m,n)$.

• Definizione di determinante di una matrice quadrata. Teorema di Laplace (solo enunciato), calcolo del determinante con la regola di Laplace. Proprietá elementari del determinante. Teorema di Binet (solo enunciato).

• Rango di una matrice. Relazione tra il rango di A ed il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da A. Teorema di Kronecker (solo enunciato).

• Matrici invertibili. Il gruppo $GL(n,\mathbb{R})$. Costruzione dell' inversa di una matrice (non dimostrato). Matrice associata ad un cambiamento di base in uno spazio vettoriale. Relazione tra invertibilitá e determinante.

• Matrici simili. Invarianti per similitudine.

• Matrici ortogonali. Condizioni sulle colonne affinché una matrice sia ortogonale. Il gruppo $O(n)$. Le matrici ortogonali di ordine due.

5. **Applicazioni lineari.**

• Definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine di una applicazione lineare e struttura di sottospazi. Il Teorema delle dimensioni (dimostrazione facoltativa).

• Proprietá di una applicazione: iniettivitá e suriettivitá. Una applicazione lineare é univocamente determinata dalle immagini dei vettori di una base.

• Matrice associata ad una applicazione lineare rispetto alle basi fissate nel dominio e codominio. Espressione matriciale.

• Sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali. Matrice associata e scrittura matriciale. Soluzioni del sistema e compatibilitá. Sistemi lineari omogenei: descrizione dello spazio vettoriale delle soluzioni. Sistemi lineari non omogenei: Teorema di Rouché-Capelli, descrizione della varietá lineare delle soluzioni del sistema, teorema di Cramer (solo enunciato).

6. **Autovalori di un endomorfismo e diagonalizzazione.**

• Definizione di autovalore ed autovetture di operatore lineare. Autospazio associato ad un autovalore, autospazi distinti sono in somma diretta. Ricerca degli autovalori.

• Polinomio caratteristico di una matrice A, equazione caratteristica e spettro. Invarianza per similitudine del polinomio caratteristico. Polinomio caratteristico di un operatore lineare. Espressione e proprietá del polinomio caratteristico (dimostrato solo per $n = 2$). Definizione di molteplicitá algebrica e geometrica di un autovalore: relazione tra esse, autovalori regolari.

• Operatore lineare diagonalizzabile e matrice diagonalizzabile. Relazione tra diagonalizzazione e esistenza basi formate da autovettori. Criteri di diagonalizzazione di un operatore lineare (dimostrazione facoltativa). Condizione sufficiente per la diagonalizzazione di un operatore lineare.

7. **Struttura metrica in $\mathbb{R}^n$.**

• Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Norma di un vettore, angolo formato da due vettori, vettori ortogonali e versori. Disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e triangolare (dimostrazione facoltativa).

• Basi ortogonali e ortonormali e proprietá relative. Teorema di Gram-Schmidt (solo enunciato). Matrici ortogonali e loro proprietá.

- Complemento ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e proprietá (dimostrazione facoltativa).

- Teorema spettrale per le matrici reali simmetriche (solo enunciato) e corollari.

8. **Forme quadratiche e applicazioni.**

   - Forme quadratiche reali su $\mathbb{R}^n$ e relazione con le matrici reali simmetriche. Segno di una forma quadratica: forme quadratiche definite positive (negative), semidefinite positive (negative), non definite.

   - Riduzione di una forma quadratica reale a forma canonica. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica sia definita positiva (negativa) o semidefinita positiva (negativa).

   - Definizione di conica in $\mathbb{E}^2_O$. Matrice associata ad una conica, discriminante di una conica. Coniche degeneri. Teorema di classificazione delle coniche (solo enunciato). Riconoscimento e riduzione a forma canonica di una conica.

Testi consigliati:

- M. Abate, Algebra lineare, Mc Graw-Hill.
- M. Grieco , B. Zucchetti, Algebra lineare e Geometria analitica, Ed. La Goliardica Pavese, Pavia.
- Dispense disponibili in rete.