FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA (mn).
(Ing. per l'Ambiente e il Territorio, Ing. Informatica - Sede di Mantova)
A.A. 2008/2009. Docente: F. BISI.

1 Regole generali per l'esame

L'esame è costituito da una prova scritta (o, in alternativa, da due prove scritte in itinere) e da una prova orale.

La prova orale va sostenuta nei giorni successivi al giorno della prova scritta (o della II prova scritta in itinere), secondo un calendario che verrà comunicato agli Studenti dalla Commissione giudicatrice.

Se, a seguito della prova orale, lo studente viene riprovato, o decide di rifiutare il voto, è necessario ripetere le due prove (scritta e orale) per ricevere una nuova valutazione. **Il ritiro, durante una qualunque delle prove d'esame, equivale al non superamento dell'esame stesso.**

Durante le prove d'esame, non è consentito l'uso né di libri, né di appunti, né di calcolatrici tascabili, né di telefoni cellulari; è altresì rigorosamente vietato comunicare con altre persone (esclusi i membri della commissione) con qualsiasi mezzo diretto (vocale, gestuale, scritto, ecc.) o indiretto (cellulare, SMS, email ecc.).

La violazione delle norme relative al paragrafo precedente comporta l'esclusione INAPPELLABILE dalla prova. L'iscrizione alle prove scritte online sul sito di Facoltà è OBBLIGATORIA. Ulteriori informazioni ed ntegrazioni alle presenti norme nel sito del docente:

`http://smmm.unipv.it/teaching.html.`

2 Libro di Testo

Il libro di testo adottato è il seguente:

[G-Z] : M. Grieco , B. Zucchetti,"Algebra lineare e Geometria analitica', Ed. La Goliardica Pavese, Pavia.

Nel sito del docente vengono fornite dispense integrative; altro materiale può essere scaricato dl sito di "dispense online" della Facoltà di Ingegneria, Università di Pavia

`http://ingegneria.unipv.it/servizi.copisteriavirtuale.php.`

3 Programma del corso

3.1 Strutture algebriche e numeri complessi

Definizione di numero complesso in forma algebrica: parte reale e parte immaginaria. Rappresentazione grafica di un numero complesso e forma polare: modulo e argomento. Strutture algebriche: gruppi abeliani, anelli, campi. Somma e prodotto di numeri complessi: struttura di campo. Formula di De Moivre. Radici di un numero complesso. Anello dei polinomi a coefficienti reali e complessi. Il teorema fondamentale dell'Algebra (solo enunciato).

Riferimenti: [G-Z], 0.1, 0.3, 0.5 e 0.6; dispense disponibili in rete.

4 Spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su un campo $\mathbb{K}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, lo spazio vettoriale E^3_O dei vettori applicati in O, lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x, lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sottospazi vettoriali: definizione di sottospazio, criterio per stabilire se un sottoinsieme è un sottospazio, sottospazio generato da n vettori $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n)$ (chiusura lineare). Spazi vettoriali finitamente generati. Definizione di dipendenza ed indipendenza lineare. Definizione di base di uno spazio finitamente generato. Proprietà fondamentale della base. Coordinate o componenti di un vettore rispetto ad una base. Esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato (solo enunciato). Due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi (solo enunciato). Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$. Definizione di isomorfismo di spazi vettoriali. Uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Operazioni con i sottospazi: intersezione di due sottospazi (è un sottospazio vettoriale); unione di due sottospazi (non è un sottospazio). Definizione di somma di sottospazi e di somma diretta. Teorema di Grassmann (solo enunciato).

Riferimenti: [G-Z], 1.1, 1.2, 1.3 (escluso il prodotto diretto), 1.4 , 1.5, 1.6.

5 Geometria analitica

Lo spazio vettoriale E^3_O dei vettori applicati in un punto O. Riferimento cartesiano ortogonale monometrico $R(O; x, y, z)$, coordinate cartesiane di un punto, traslazione di sistemi di riferimento. Equazioni parametriche di rette e piani: direzione di una retta, retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati. Definizione di prodotto scalare in E^3_O e proprietà (con dimostrazione). Significato geometrico e proiezioni ortogonali. Espressione del prodotto scalare in componenti (con dimostrazione). Applicazione: calcolo della distanza di due punti. Equazione cartesiana del piano, vettore normale al piano, giacitura del piano, parallelismo di piani. Equazioni cartesiane della retta, parallelismo tra rette, parallelismo retta-piano, perpendicolarità retta-piano. Posizione reciproca di due rette: rette complanari e rette sghembe. Calcolo della distanza punto-retta, punto-piano. Retta bisettrice dell'angolo fra due rette incidenti; piano bisettore dell'angolo diedro fra piani.

Riferimenti: [G-Z], 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 (fino a pag.118).

6 Matrici

Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(m,n)$ delle matrici di tipo (m,n) (m righe, n colonne) ad elementi in $\mathbb{K}$. Trasposta di una matrice. Matrici simmetriche ed antisimmetriche (o emisimmetriche). Prodotto di matrici "righe per colonne" per matrici compatibili. Proprietà del prodotto di matrici nell'anello $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Matrici idempotenti e nilpotenti. Definizione di determinante di una matrice quadrata. Teorema di Laplace (solo enunciato), calcolo del determinante con la regola di Laplace. Proprietà elementari del determinante. Teorema di Binet (solo enunciato). Lo spazio $RA = \mathrm{row}(A)$ generato dalle righe di una matrice A e lo spazio $CA = \mathrm{col}(A)$ generato dalle colonne di A: $\dim(RA) = \dim(CA)$ (solo enunciato). Definizione di rango di una matrice. Il rango di A come il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da A. Teorema di Kronecker (solo enunciato). Definizione di matrice invertibile. Unicità dell'inversa di una matrice. Il gruppo $GL(n,\mathbb{K})$. Costruzione dell'inversa di una matrice (non dimostrato). Matrice associata ad un cambiamento di base in uno spazio vettoriale. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Definizione di matrice ortogonale in $GL(n,\mathbb{R})$. Condizioni sulle righe affinché una matrice sia ortogonale. Il gruppo ortogonale $O(n)$; il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$. Le matrici ortogonali di ordine due. Prodotto vettoriale in E^3_O.

Riferimenti: [G-Z], 3.1(3.1.1, 3.1.2), 3.2, 3.3 (escluse le matrici unitarie), 3.4 (3.4.1, 3.4.3), 4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 (fino a pag. 189). Dispense del docente.

7 Applicazioni lineari

Definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali, endomorfismi, isomorfismi ed automorfismi. Definizione di nucleo e immagine di una applicazione lineare f : Ker(f) e Im(f) sono sottospazi. Il Teorema delle dimensioni (con dimostrazione). Proprietà di un'applicazione lineare f: iniettività e suriettività, teoremi sull'iniettività (con dimostrazione). Una applicazione lineare è univocamente determinata dalle immagini dei vettori di una base $\mathcal{B}$. Definizione di matrice rappresentativa di un'applicazione lineare f rispetto alle basi fissate nel dominio e codominio. Espressione di f, calcolo di $\operatorname{Ker} f$ e rango di f con la matrice rappresentativa. Definizione di composizione di due applicazioni lineari e di inversa di una applicazione lineare. Matrici associate alla composizione di applicazioni e all'inversa (solo enunciato). Sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali: definizione di matrice associata A, scrittura matriciale, soluzioni del sistema e compatibilità. Sistema lineare omogeneo: descrizione dello spazio vettoriale delle soluzioni. Sistemi lineari non omogenei: Teorema di Rouché-Capelli, descrizione della varietà lineare delle soluzioni del sistema, teorema di Cramer (solo enunciato). Matrici equivalenti. Teorema di equivalenza (due matrici sono equivalenti se e solo se sono equivalenti) (con dimostrazione). Matrici simili. Invarianti per similitudine (con dimostrazione).

Riferimenti: [G-Z], 5.1, 5.2, 5.3 (parte), 5.4, 5.5.

8 Autovalori di un endomorfismo e diagonalizzazione

Definizione di autovalore ed autovetture di un endomorfismo. Definizione di autospazio associato ad un autovalore, autospazi distinti sono in somma diretta. Ricerca degli autovalori: $\det(A-\lambda I) = 0$. Definizione di polinomio caratteristico di una matrice A, equazione caratteristica e spettro. Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine (con dimostrazione). Definizione di polinomio caratteristico di un endomorfismo. Espressione e proprietà del polinomio caratteristico (cenni sulla dimostrazione). Autovalori di una matrice diagonale e di una matrice triangolare; matrici a blocchi. Autovalori di matrici potenza. Definizione di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore: relazione tra esse. Definizione di autovalore regolare. Definizione di endomorfismo diagonalizzabile e matrice diagonalizzabile. Un endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori di f. Criteri di diagonalizzazione di un endomorfismo f di $\mathcal{V}$: f è diagonalizzabile se e solo se $\mathcal{V}$ è somma diretta degli autospazi di f; f è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico è totalmente decomponibile e ogni autovalore è regolare. Condizione sufficiente per la diagonalizzazione di f.

Riferimenti: [G-Z], 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5.

9 Teorema spettrale e conseguenze

Definizione di forma quadratica reale su $\mathbb{R}^n$ e relazione con le matrici reali simmetriche. Forme quadratiche definite positive (negative), semidefinite positive (negative), non definite. Definizione di prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma di un vettore, di angolo formato da due vettori, di vettori ortogonali e di versori. Definizione del complemento ortogonale $\mathcal{V}^\perp$ di un sottospazio $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}^n$ e proprietà. Definizione di base ortonormale. Teorema di Gram-Schmidt (solo enunciato). Una matrice A è ortogonale se e solo se realizza un cambiamento di basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$. Teorema spettrale per le matrici reali simmetriche(parzialmente dimostrato). Riduzione di una forma quadratica reale a forma canonica. Condizione necessaria e sufficiente afinché una forma quadratica sia definita positiva (negativa) o semidefinita positiva (negativa).

Riferimenti: Dispense disponibili in rete.

10 Coniche e superfici quadriche

Equazioni canoniche di ellisse, iperbole e parabola. Definizione di conica in E^2_O. Coniche degeneri. Matrice associata ad una conica, discriminante Δ di una conica. Teorema di classificazione delle coniche (con cenni di dimostrazione). Riconoscimento e riduzione a forma canonica di una conica.

Riferimenti: Dispense disponibili in rete.