

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA (mn).
(Ing. Meccatronica,
Ing. per l'Ambiente e il Territorio - Sede di Mantova)
A.A. 2010/2011. Docente: F. BISI.

1 Regole generali per l'esame

L'esame è costituito da una prova scritta e da una prova orale.

La prova orale di norma viene sostenuta nei giorni successivi al giorno della prova scritta, secondo un calendario che verrà comunicato agli Studenti dalla Commissione giudicatrice. Gli studenti che hanno conseguito almeno 24 punti in una prova scritta del primo appello della sessione invernale possono chiedere di sostenere la prova orale in concomitanza con il secondo appello della sessione invernale, conservando la valutazione della prova scritta.

Se, a seguito della prova orale, lo studente viene riprovato, o decide di rifiutare il voto, è necessario ripetere le due prove (scritta e orale) per ricevere una nuova valutazione. **Il ritiro, durante una qualunque delle prove d'esame, equivale al non superamento dell'esame stesso.**

Durante le prove d'esame, non è consentito l'uso né di libri, né di appunti, né di calcolatrici tascabili, né di telefoni cellulari; è altresì rigorosamente vietato comunicare con altre persone (esclusi i membri della commissione) con qualsiasi mezzo diretto (vocale, gestuale, scritto, ecc.) o indiretto (cellulare, SMS, email ecc.).

La violazione delle norme relative al paragrafo precedente comporta l'esclusione INAPPELLABILE dalla prova. L'iscrizione alle prove scritte online sul sito di Facoltà è OBBLIGATORIA. Ulteriori informazioni ed integrazioni alle presenti norme nel sito del docente:

<http://smmm.unipv.it/teaching.html>,

o seguendo direttamente il

link per il corso di Geometria e Algebra.

2 Materiale didattico

Presso il sito segnalato sopra vengono messe a disposizione dispense su tutti gli argomenti svolti nel corso ([BBB]); le dispense costituiscono un aiuto nella

preparazione all'esame, ma non costituiscono 'testo ufficiale' dei contenuti. Nello stesso sito si trova altro materiale aggiuntivo (esercizi, test, vecchie prove d'esame, alcune con risposte corrette e/o risoluzione dei problemi).

In aggiunta alle dispense, gli studenti possono consultare testi di algebra lineare e geometria analitica; i libri di testo consigliati sono i seguenti:

- [A-dF] M. Abate , C. de Fabritiis, "Geometria analitica con elementi di algebra lineare", Ed. McGraw-Hill Italia, Milano.
- [G-Z] M. Grieco , B. Zucchetti, "Algebra lineare e geometria analitica", Ed. La Goliardica Pavese, Pavia.

3 Programma del corso

In grassetto sono indicati i teoremi per i quali può essere richiesta la dimostrazione. Vengono riportati riferimenti *indicativi* della collocazione degli argomenti elencati nelle dispense e nei testi consigliati (per [A-dF], riferiti alla prima edizione).

3.1 Preliminari. Strutture algebriche e numeri complessi

Nozioni di base di teoria degli insiemi (appartenenza, inclusione, unione, intersezione, prodotto cartesiano); relazioni di equivalenza, classi di equivalenza. Insiemi numerici: naturali, interi, reali, complessi. Principio di induzione; esempio di suo utilizzo (**teorema della cardinalità dell'insieme delle parti**). Logica matematica elementare; implicazione; condizioni necessarie e sufficienti. Funzione; immagine e controimmagine; funzioni iniettive, surgettive, bigettive; funzione inversa; composizione di funzioni. Strutture algebriche: gruppi, gruppi abeliani, anelli, campi. Definizione di numero complesso in forma algebrica: parte reale e parte immaginaria. Rappresentazione grafica di un numero complesso (piano di Gauss-Argand) e forma polare (o trigonometrica): modulo e argomento. Coniugio. Formula di Eulero e rappresentazione esponenziale. Somma e prodotto di numeri complessi: struttura di campo. Formula di De Moivre. Radici dell'unità; radici di un numero complesso. Anello dei polinomi a coefficienti reali e complessi. **Teorema di Ruffini**, regola di Ruffini. Il teorema fondamentale dell'Algebra (solo enunciato); **corollario dell'esistenza di una radice reale per polinomi reali di grado dispari**. Fattorizzazione di polinomi in campo reale e in campo complesso.

Riferimenti: [BBB], Capitolo 0. [A-dF] Capitolo 1; 4.6, 4.7. [G-Z] 0.1, 0.3, 0.5 e 0.6.

3.2 Vettori applicati e geometria dello spazio

Lo spazio vettoriale $\mathbb{E}_O^3$ dei vettori applicati in un punto O ; somma e differenza di vettori; moltiplicazione di un vettore per uno scalare; traslazione di un vettore. Riferimento cartesiano ortogonale monometrico, coordinate cartesiane di un punto, traslazione di sistemi di riferimento. Vettori linearmente indipendenti; *span* di uno o due vettori. Equazioni parametriche di rette e piani: direzione di una retta, retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati. Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{E}_O^3$ e **relative proprietà. Significato geometrico e proiezioni ortogonali. Espressione del prodotto scalare in componenti.** Applicazione: calcolo della distanza di due punti. Equazione cartesiana del piano, vettore normale al piano, giacitura del piano, parallelismo di piani. Equazioni cartesiane della retta, parallelismo tra rette, parallelismo retta-piano, perpendicolarità retta-piano. Fascio proprio di piani e fascio improprio di piani. Posizione reciproca di due piani, di un piano e una retta, di due rette: rette complanari e rette sghembe. Calcolo della distanza punto-piano e punto-retta.

Riferimenti: [BBB], Capitolo 1. [A-dF], 2.1, 2.1, 2.3. [G-Z], 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 (fino a pag.118).

3.3 Spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: n -uple ordinate come vettori. Addizione di vettori e moltiplicazione per uno scalare; vettore nullo; proprietà. Lo spazio vettoriale E_O^3 dei vettori applicati in O , lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x , lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (su campo reale e su campo complesso). Sottospazi vettoriali: definizione di sottospazio; somma di sottospazi vettoriali; **la somma di sottospazi è un sottospazio vettoriale.** Sottospazio generato da n vettori $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ (chiusura lineare); **lo Span di un numero finito di vettori è un sottospazio vettoriale. Proprietà degli Span di liste di vettori.** Sistema di generatori; spazi vettoriali finitamente generati. Definizione di dipendenza ed indipendenza lineare. Proprietà delle liste di vettori linearmente indipendenti. Definizione di base di uno spazio finitamente generato. **Proprietà fondamentale della base (unicità della combinazione lineare).** Basi canoniche di spazi $\mathbb{R}^n$. **Proprietà delle basi.** Coordinate o componenti di un vettore rispetto ad una base. Teorema di esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato. (**Algoritmo di completamento e**

di estrazione di una base. Due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Dimensione di sottospazi vettoriali. Definizione di isomorfismo di spazi vettoriali. Uno spazio vettoriale reale di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Operazioni con i sottospazi: intersezione di due sottospazi (**è un sottospazio vettoriale**); unione di due sottospazi (**non è un sottospazio**). Somma diretta; teorema di Grassmann.

Riferimenti: [BBB], Capitolo 2. [A-dF], 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5. [G-Z], 1.1, 1.2, 1.3 (escluso il prodotto diretto), 1.4, 1.5, 1.6.

3.4 Matrici

Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ delle matrici di ordine $m \times n$ (m righe, n colonne) ad elementi in $\mathbb{R}$. **Operazioni di addizione fra matrici, e di moltiplicazione per uno scalare; proprietà.** Prodotto fra matrice e vettore compatibili; prodotto “righe per colonne” per matrici compatibili; interpretazioni alternative del prodotto fra matrici. **Proprietà del prodotto di matrici nell’anello $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$.** Matrice identità; matrice inversa, invertibilità. **Le colonne di una matrice quadrata reale invertibile di ordine n sono una base di $\mathbb{R}^n$, e viceversa.** **Proprietà delle matrici invertibili.** Gruppo lineare delle matrici invertibili di ordine n . **Cambio di base e matrice relativa.** Trasposta di una matrice e **relative proprietà.** Matrici simmetriche ed antisimmetriche (o emisimmetriche). Definizione di determinante di una matrice quadrata. **Teorema per lo sviluppo lungo la prima riga e per il determinante della matrice trasposta.** **Teorema di Laplace** (calcolo del determinante con la regola di Laplace). **Proprietà elementari del determinante.** Teorema di Binet. **Legame fra invertibilità e non singolarità di una matrice.** **Regola di Cramer per il calcolo della matrice inversa.** Definizione di rango di una matrice; **proprietà del rango di una matrice.** **Il rango di A coincide il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da A .** Teorema di Kronecker (degli orlati).

Riferimenti: [BBB], Capitolo 3. [A-dF], Capitolo 9. [G-Z], 3.1(3.1.1, 3.1.2), 3.2, 3.3 (escluse le matrici unitarie), 3.4 (3.4.1, 3.4.3), 4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 (fino a pag. 189);

3.5 Applicazioni lineari

Applicazione associata ad una matrice e **sue proprietà.** Definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali; endomorfismi, isomorfismi ed automorfismi. **L’immagine di un sottospazio è un sottospazio.** Definizione di nucleo e immagine di una applicazione lineare $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tra due

spazi vettoriali: $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ sono sottospazi. Le immagini secondo un'applicazione lineare dei vettori di una base del dominio sono un sistema di generatori per l'immagine dell'applicazione. Il Teorema delle dimensioni (o di rango-nullità). Il rango di una matrice e della sua trasposta coincidono. Teoremi sull'iniettività. Isomorfismi; isomorfismo di rappresentazione su una base. **Proprietà delle rappresentazioni.** Unicità dell'applicazione lineare definita le immagini dei vettori di una base del dominio. Definizione di matrice rappresentativa di un'applicazione lineare f rispetto alle basi fissate nel dominio e nel codominio; **teorema fondamentale di rappresentazione.** Traccia di una matrice quadrata e sue proprietà. Matrici rappresentative di una stessa applicazione lineare in basi differenti; similitudine fra matrici quadrate; **invarianti matriciali per similitudine.**

Riferimenti: [BBB], Capitolo 4. [A-dF], Capitolo 5; [G-Z], 5.1, 5.2, 5.3 (parte), 5.4, 5.5.

3.6 Sistemi lineari

Sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali: definizione di matrice associata A , scrittura matriciale, soluzioni del sistema e compatibilità (o risolubilità). Sistema lineare omogeneo: **descrizione dello spazio vettoriale delle soluzioni.** Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k è definito da $n - k$ equazioni omogenee indipendenti. Sistemi triangolari: definizione e teorema di unicità della soluzione. Sistemi lineari non omogenei: varietà lineare (sottospazio affine); **teorema di struttura; teorema di Rouché-Capelli.** Sistemi quadrati non singolari; **regola di Cramer per la soluzione di un sistema quadrato non singolare.** Metodo di risoluzione dei sistemi lineari. L'algoritmo di eliminazione di Gauss: sistemi quadrati. Sistemi a scala e riduzione a scala; applicazioni del metodo di riduzione a scala. Determinazione del rango di una matrice mediante riduzione a scala.

Riferimenti: [BBB], Capitolo 5. [A-dF], Capitolo 3 e 6. [G-Z], 5.4, 5.5.

3.7 Autovalori e diagonalizzazione

Definizione di autovalore ed autovettore di un operatore lineare; spettro. Definizione di autospazio associato ad un autovalore; **autospazi associati a due autovalori distinti sono in somma diretta.** Autovalori, autovettori e spettro di una matrice quadrata.

La base dello spazio è composta da autovettori se e solo se la matrice dell'applicazione nella base è diagonale; corollari e definizione

di diagonalizzabilità. Ricerca degli autovalori: $\det(A - \lambda I) = 0$. Definizione di polinomio caratteristico di una matrice A , equazione caratteristica e spettro. **Proprietà del polinomio caratteristico.** Autovalori di una matrice diagonale e di una matrice triangolare; matrici a blocchi. Dimensione dell'autospazio associato ad un autovalore. Autospazi e somma diretta. **Determinante e traccia di una matrice con tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.** Definizione di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore: **relazione tra esse.** Definizione di autovalore regolare. **Teorema fondamentale per la diagonalizzabilità.**

Riferimenti: [BBB] Capitolo 6. [A-dF] Capitolo 13. [G-Z], 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5;

3.8 Struttura metrica in spazi $\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$; **proprietà**; norma indotta dal prodotto scalare. **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, disuguaglianza triangolare.** Angolo formato da due vettori; vettori ortogonali e versori. Definizione di base ortonormale; **proprietà**. Proiezione ortogonale. Definizione del complemento ortogonale $\mathcal{V}^\perp$ di un sottospazio $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}^n$ e **proprietà**. Teorema di Gram-Schmidt per l'algoritmo di ortogonalizzazione. Definizione di matrice ortogonale in $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$. **Condizioni sulle righe e sulle colonne di una matrice ortogonale.** Il gruppo ortogonale $\mathcal{O}(n)$; il gruppo ortogonale speciale $\mathcal{SO}(n)$. **Le matrici ortogonali di ordine due. Ortogonalità degli autovettori associati ad autovalori distinti per matrici simmetriche.** Teorema spettrale per le matrici reali simmetriche. Teorema di Eulero per le matrici di $\mathcal{SO}(3)$ (rotazioni).

Riferimenti: [BBB] Capitolo 7. [A-dF] 14.1.

3.9 Forme quadratiche e loro applicazioni

Definizione di forma quadratica reale su $\mathbb{R}^n$ e relazione con le matrici reali simmetriche. Forme quadratiche definite positive (negative), semidefinite positive (negative), non definite. Riduzione di una forma quadratica reale a forma canonica. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica sia definita positiva (negativa) o semidefinita positiva (negativa). Criterio dei minori incapsulati Equazioni canoniche di ellisse, iperbole e parabola. Definizione di conica in E_O^2 . Coniche degeneri. Matrice associata ad una conica, discriminante Δ di una conica. Teorema di classificazione delle coniche. Riconoscimento e riduzione a forma canonica di una conica.

Riferimenti: [BBB]Capitolo 8. [A-dF] (Capitolo 15).