Università di Pavia - Facoltà di Ingegneria ***Esame di Geometria e Algebra*** - n x-embre 2011

COGNOME **NOME**

La ***prova*** di autovalutazione consta di **20** Quesiti a risposta chiusa; la durata della prova è di 1 ora e 30 minuti. Per i quesiti a risposta chiusa, la ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto. Una sola è la risposta corretta. Per ogni quesito, vengono assegnati

- 2 punti alla risposta corretta,
- -1 o -2 punti alla risposta sbagliata, a seconda della gravità dell'errore,
- 0 punti per ogni risposta non data.

L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali.

---

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, sia π il piano di equazione: $x - y + 2z = 2$. Stabilire quali tra le seguenti è una rappresentazione parametrica per il piano π:

$(-1)\ \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 2 + t + s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R};$	$(-2)\ \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R};$

$\clubsuit\ \begin{cases} x = 3 + t - 2s \\ y = 1 + t \\ z = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R};$	$(-1)\ \begin{cases} x = 2t \\ y = 2s \\ z = s - t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, considerare i vettori $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una rappresentazione della retta r perpendicolare a $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e passante per l'origine è:

$(-1)\ x - y = x - y - z = 0$	$\clubsuit\ x - y + z = x + 2y = 0$	$(-1)\ x - y + z = x + 2y = 5$	$(-2)\ 2x - y - z = 0$

3. Fissato in $\mathbb{E}^3_O$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, la retta passante per O e diretta come il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è rappresentata da:

$\clubsuit\ \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$	$(-2)\ \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$	$(-1)\ \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$	$(-1)\ \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

4. Fissata nello spazio $\mathbb{E}^3_O$ la base standard $\mathcal{B} = \left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right\}$, si consideri il vettore $\boldsymbol{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$. Quale tra i seguenti valori è ortogonale a $\boldsymbol{u}$?

$(-1)\ \boldsymbol{v}_1 = \hat{\imath}$	$(-1)\ \boldsymbol{v}_2 = \hat{\jmath} + \hat{k}$	$\clubsuit\ \boldsymbol{v}_3 = \hat{\jmath} - \hat{k}$	$(-2)\ \boldsymbol{v}_4 = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $x + y + z = 1$. Quale fra i seguenti insiemi è una retta che **non** ha punti i comune con π?

(-1) $q\colon \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\clubsuit r\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad$ (-1) $s\colon \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\quad$ (-2) $t\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$

6. Considerare i vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quali fra i seguenti vettori costituiscono con essi una base di $\mathbb{R}^4$?

$\clubsuit \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ (-1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ (-2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ (-1) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi definiti da

$$U : x - y = z - t = 0 \quad \text{e} \quad V : z = x - y + t = 0.$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni relativamente al sottospazio $U + V$ è vera:

(-1) $U + V = \mathbb{R}^4$ $\quad$ $\clubsuit U + V : x - y - z + t = 0$

(-2) $U + V : x - y = z = t = 0$ $\quad$ (-1) $U + V = V$

8. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi definiti da: $U = \{x + y - 2z = x - 2y + t = 0\}$ e $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

La dimensione di $U \cap V$ ed una sua base $\mathcal{B}$ sono:

(-2) $\dim(U \cap V) = 2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ $\clubsuit \dim(U \cap V) = 1$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(-1) $\dim(U \cap V) = 1$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ (-1) $\dim(U \cap V) = 1$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

9. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire quale delle seguenti matrici è l'inversa di A:

(-2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\clubsuit A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (-1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad$ (-1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

10. Si consideri la matrice A di ordine 3×4 dipendente dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1-h & 0 & 1 \\ 1 & h-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1+h & h & h \end{pmatrix}.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(-1) $\operatorname{rg}(A) = 3, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$	(-1) $\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & h = 0, 1 \\ 3 & h \neq 0, 1. \end{cases}$

♣ $\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & h = 1 \\ 3 & h \neq 1. \end{cases}$	(-2) $\operatorname{rg}(A) = 3, \quad \forall h \neq 0, \pm 1.$

11. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ed il vettore } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stabilire quale sia la corretta rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$:

(-2) $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,	(-1) $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,	♣ $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,	(-1) $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

12. Dire qual è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti fra i seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(-2) 1	♣ 2	(-1) 3	(-1) 4

13. Siano U e V due sottospazi di $\mathbb{R}^7$ con $\dim U = 3$ e $\dim V = 4$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(-1) $\dim(U \cap V) > 1$	(-1) $\dim(U + V) < 7$	♣ $\dim(U + V) \geq 4$	(-2) $\dim(U \cap V) = 0$

14. Si considerino la seguente matrice quadrate di ordine 2×2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabilire quale delle seguenti relazioni è corretta:

♣ $\det(-A) = 3$	(-1) $\det(-A) = -3$	(-2) $\det(A^{-1}) = 3$	(-1) $\det(A^2) = 3$

15. Si consideri la matrice A di ordine 4×3:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Il rango della matrice A è:

(-1) $\mathrm{rg}(A) = 1$	♣ $\mathrm{rg}(A) = 2$	(-1) $\mathrm{rg}(A) = 3$	(-2) $\mathrm{rg}(A) = 4$

16. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r di equazioni
$$x + z = x - y = 0.$$
Stabilire quale tra le seguenti rette è sghemba a r:

(-1) $x + z - 1 = x - y - 3 = 0$	♣ $2y + z - 1 = x - 2y = 0$
(-2) $x - y = x - 3 = 0$	(-1) $x = y - z = 0$

17. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la potenza A^{15} è la seguente matrice:

(-1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	(-1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	♣ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-2) $\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La proiezione ortogonale su $\boldsymbol{u}$ del vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è:

(-1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	(-2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	♣ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	(-1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

19. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Quali dei seguenti sottospazi è un complementare di U?

(-1) $W: x + y = 0$	♣ $W: x + 2y - z = 0$
(-1) $W: x + y = z = 0$	(-2) $W: x - 2y = z - 1 = 0$

20. Siano A una matrice quadrata di ordine 2 e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo, tali che $A \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_2$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è VERA:

♣ $\det(A) = 0$	(-1) le colonne di A sono linearmente indipendenti
(-1) A è invertibile	(-2) A è necessariamente la matrice nulla