Esame di informatica del 16 giugno 2004
tempo a disposizione: 2 ore

Introduzione: la funzione *sin* può essere ottenuta con lo *sviluppo in serie di potenze*:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!};$$

dove il simbolo ! rappresenta il fattoriale, cioè $k!$ è il prodotto dei primi k numeri interi positivi (esempio: $5! = 1*2*3*4*5 = 120$), e in MATLAB si può calcolare con la function `factorial`. Quanto scritto sopra significa che il valore di $\sin(x)$ si ottiene come *somma di infiniti addendi*:

$$1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \ldots$$

L'obiettivo di questo test è verificare al calcolatore, mediante una function in linguaggio MATLAB, lo *sviluppo in serie* sopra scritto. Per fare questo, se chiamiamo $s_n(x)$ la somma precedente arrestata all'indice n:

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

si tratta di verificare che il valore di $s_n(x)$ è una aprossimazione di $\sin(x)$, tanto migliore quanto più n è grande. Più precisamente, si chiede di procedere nel modo sottoindicato:

primo passo: scrivere una `function` di nome `successione` che calcoli, dato un numero x e un indice intero positivo i, l'elemento `successione(x,i)`$= a_i(x)$ della successione:

$$a_i(x) = \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

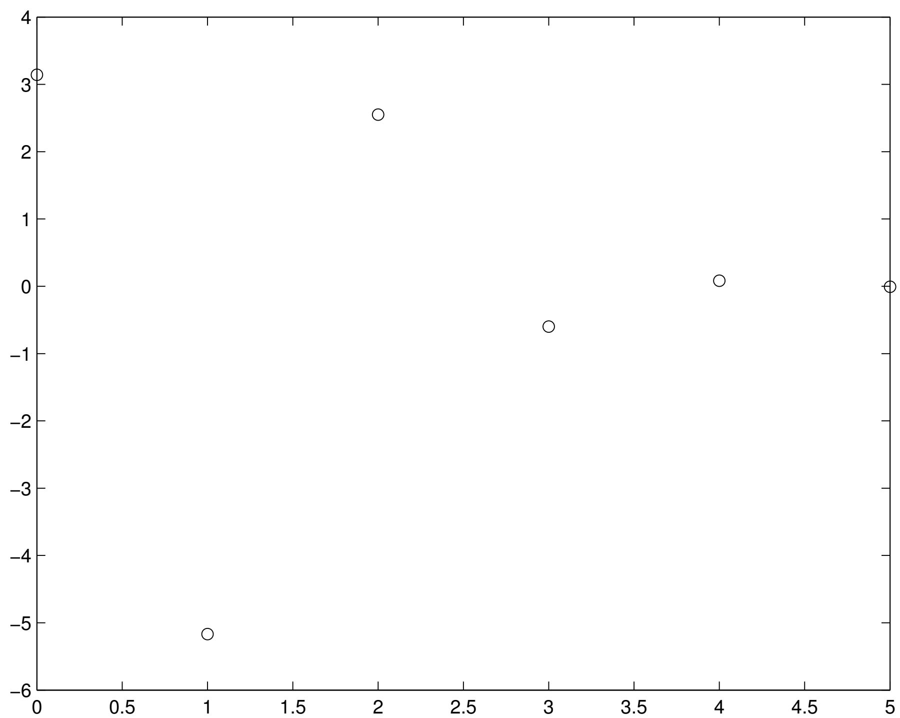
Quindi , ad esempio, `successione(pi,2)` deve calcolare $\frac{\pi^5}{5!} \approx 2.5502$; si verifichi il corretto funzionamento del codice, che dovrà fornire, ad esempio, i risultati seguenti:

```
>> successione(pi,0)

ans =

    3.1416

>> successione(pi,1)

ans =

   -5.1677

>> successione(pi,2)

ans =

    2.5502

>> successione(1,0)

ans =

     1

>> successione(1,1)
```

```
ans =

   -0.1667

>> successione(1,2)

ans =

    0.0083
```

Attenzione: notate che si può avere anche $i = 0$, ed in questo caso $a_0(x) = x$ per qualunque valore di x.

facoltativo: scrivere una `function` di nome `plot_successione` tale che `plot_successione(x,n)` faccia il grafico dei valori $a_i(x)$ per i che va da 0 a n; ad esempio `plot_successione(pi,5)` deve produrre il grafico



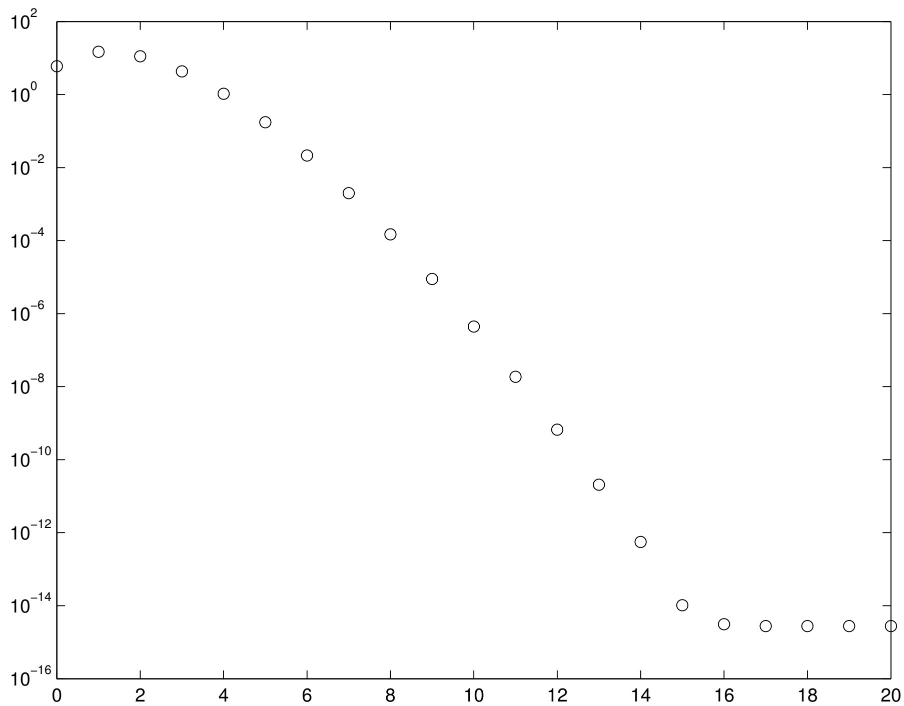
secondo passo: scrivere una `function` di nome `sommatoria` che calcoli, dato un numero x e un indice intero positivo n, la somma dei primi n elementi della successione precedente, ovvero la somma $s_n(x) = a_0(x) + a_1(x) + \ldots + a_{n-1}(x) + a_n(x)$; pertanto si dovranno ottenere i risultati seguenti:

```
>> sommatoria(pi/2,0)

ans =

    1.5708

>> sommatoria(pi/2,1)

ans =

    0.9248

>> sommatoria(pi/2,2)
```

```
ans =

    1.0045

>> sommatoria(pi/2,3)

ans =

    0.9998
```

Verificare numericamente che al crescere di n il valore di $s_n(x)$ =`sommatoria(x,n)` approssima sempre meglio il valore di $\sin(x)$.

facoltativo: scrivere una `function` di nome `plot_errore` tale che `plot_errore(x,n)` rappresenti il grafico in scala logaritmica (usare il comando `semilogy`) dell'errore $|\sin(x) - s_i(x)|$ ottenuto per $i = 0, 1, \ldots, n$. Ad esempio, con `plot_errore(5,20)` si dovrebbe ottenere:



Commentare il diagramma così ottenuto.