

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
**Prova “in itinere” di**  
**Modellistica Elettrica e Magnetica**  
**Modulo A**  
23 Novembre 2009

Il *Candidato* scriva i propri Cognome, Nome e Matricola.

**COGNOME**

**NOME**

**MATRICOLA**

---

---

La prova dovrà essere espletata in due ore di tempo.

Non è consentito consultare testi o appunti.

La risposta a ciascun quesito deve essere contenuta nello spazio indicato.

L'esito sarà pubblicato all'indirizzo <http://smmm.unipv.it/teaching.html>

---

---

**ESITO**

---

---

**NON autorizzo la diffusione in chiaro dell'esito della prova**

*Firma:*

---

---

**DOMANDE**

---

---

1. Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  campi vettoriali differenziabili definiti in un aperto dello spazio euclideo tridimensionale. Calcolare  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ ,  $\text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$  e  $\nabla[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}]$ .

- 
- 
2. Che cos'è e quando si può definire il potenziale vettoriale di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$ ?

- 
- 
3. La carica  $Q$  è uniformemente distribuita lungo un anello circolare di raggio  $R$  che giace sul piano  $(x, y)$  di un riferimento cartesiano, con centro nell'origine delle coordinate. Determinare il campo elettrico lungo l'asse  $z$ . Se nell'origine è posto un dipolo puntiforme di momento  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_z$ , calcolare la forza e la coppia elettriche esercitate dall'anello sul dipolo.

- 
- 
4. Un disco di raggio  $R$  è posto sul piano  $(x, y)$  di un riferimento cartesiano con centro nell'origine delle coordinate. Se il disco è sede di una distribuzione uniforme di dipoli elettrici puntiformi con momento dipolare di densità superficiale  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_z$ , calcolare il potenziale elettrostatico in tutti i punti dell'asse  $z$ .

- 
- 
5. Se il piano  $(x, y)$  di un riferimento cartesiano è sede di una distribuzione uniforme di dipoli elettrici puntiformi con momento dipolare di densità superficiale  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_z$ , determinare il campo elettrico in tutti i punti dello spazio.

- 
- 
6. Sapendo che quando un dipolo puntiforme di momento  $\mathbf{d}$  è posto nel punto  $o$  il gradiente del campo elettrico che esso genera nello spazio circostante è dato dal tensore

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3}{r^4} [(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{I} + (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{e}_r) - 5(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r],$$

dove  $r := |p - o|$  e  $\mathbf{e}_r := \frac{p-o}{r}$ , calcolare la forza  $\mathbf{f}_{21}$  che un dipolo puntiforme di momento  $\mathbf{d}_1$  nel punto  $p_1$  esercita su un dipolo puntiforme di momento  $\mathbf{d}_2$  nel punto  $p_2 \neq p_1$ . In particolare, dire se la forza  $\mathbf{f}_{21}$  è parallela al vettore interdipolare  $(p_2 - p_1)$ . Scambiando i ruoli dei dipoli  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$ , determinare la forza  $\mathbf{f}_{12}$  che il dipolo  $\mathbf{d}_2$  esercita sul dipolo  $\mathbf{d}_1$ . In particolare, calcolare la forza totale  $\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21}$ .