Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 10 settembre 2004
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Trovare le coordinate del centro del cerchio osculatore della curva*

$$p(u) - O = 3u\boldsymbol{e}_x + 2u^2\boldsymbol{e}_y + u^3\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente ad $u = 0$*.*

Dette κ e $\boldsymbol{n}$ la curvatura ed il versore normale principale della curva in O, punto della curva corrispondente ad $u = 0$, le coordinate di C si ricavano dalla formula

$$C - O = C - P(0) + P(0) - O = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}\,,$$

visto che $P(0) = O$. Poiché

$$\dot{p}(u) = 3\boldsymbol{e}_x + 4u\boldsymbol{e}_y + 3u^2\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p}(u) = 4\boldsymbol{e}_y + 6u\boldsymbol{e}_z$$

e dunque

$$\dot{p}(0) = 3\boldsymbol{e}_x \quad \text{e} \quad \ddot{p}(0) = 4\boldsymbol{e}_y$$

abbiamo

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{p}(0)}{|\dot{p}(0)|} = \boldsymbol{e}_x$$

e

$$\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)}{|\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)|} = \boldsymbol{e}_z$$

da cui si ricava

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_y\,.$$

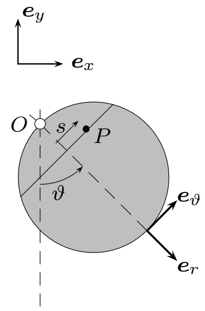
Infine,

$$\kappa = \frac{|\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)|}{|\dot{p}(0)|^3} = \frac{4}{9}$$

da cui otteniamo

$$C - O = \frac{9}{4}\boldsymbol{e}_y\,.$$

Q2. *In un piano, un disco di massa* $3m$ *e raggio* $2R$ *ha un punto della circonferenza incernierato ad un punto fisso* O*. Ortogonalmente al diametro per* O*, a distanza* R *da* O*, è praticata una scanalatura entro cui può muoversi senza attrito un punto materiale* P *di massa* $6m$*. Trovare il momento della quantità*



di moto del sistema rispetto ad O, in funzione delle coordinate lagrangiane s e ϑ e delle loro derivate temporali.

Trattiamo separatamente il contributo del disco e quello del punto. Per il disco, che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ attorno all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ abbiamo, grazie al teorema di Huygens-Steiner

$$\boldsymbol{K}_O^d = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = 18mR^2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z\,.$$

Introduciamo ora il versore radiale $\boldsymbol{e}_r$, diretto lungo il raggio per O, orientato come in figura ed il versore $\boldsymbol{e}_\vartheta$ ad esso ortogonale, orientato in modo che $\boldsymbol{e}_r \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_z$. Possiamo allora scrivere

$$P - O = R\boldsymbol{e}_r + s\boldsymbol{e}_\vartheta\,.$$

Poiché i versori $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta\}$ sono solidali al disco, grazie alle formule di Poisson abbiamo

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_r = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_r$$

e pertanto la velocità di P si scrive

$$\boldsymbol{v}_P = (R\dot{\vartheta} + \dot{s})\boldsymbol{e}_\vartheta - s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_r\,.$$

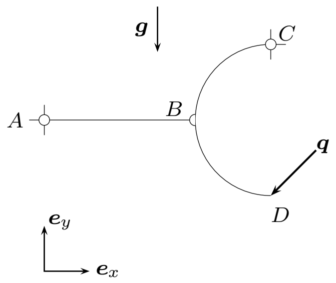
Il contributo al momento angolare rispetto ad O del punto P è pertanto

$$\boldsymbol{K}_O^P = (P - O) \wedge 6m\boldsymbol{v}_P = 6m(R^2\dot{\vartheta} + R\dot{s} + s^2\dot{\vartheta})\boldsymbol{e}_z$$

che, sommato a $\boldsymbol{K}_O^d$ fornisce il risultato finale

$$\boldsymbol{K}_O = 6m[(4R^2 + s^2)\dot{\vartheta} + R\dot{s}]\boldsymbol{e}_z$$

Q3. *La struttura rigida riportata in Figura è composta da due aste omogenee, AB e DBC. L'asta rettilinea AB ha peso $4p$ e lunghezza 2ℓ mentre DBC è a forma di semicirconferenza, ha peso trascurabile e raggio ℓ. In D agisce il carico concentrato $\boldsymbol{q} = -3p(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$. La struttura è articolata in B con una cerniera*



e vincolata a terra con altre due cerniere in A e C. Calcolare il modulo della reazione vincolare sviluppata dalla cerniera in C.

L'equilibrio dei momenti rispetto al punto B per l'asta AB impone

$$-2\Phi_{Ay}\ell + 4p\ell = 0$$

da cui segue

$$\Phi_{Ay} = 2p\,.$$

Richiedendo ora l'equilibrio per l'intera struttura nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ otteniamo

$$\Phi_{Cy} + 2p - 4p - 3p = 0$$

e pertanto

$$\Phi_{Cy} = 5p\,.$$

Se richiediamo ora l'equilibrio dei momenti rispetto a B per l'asta DBC abbiamo

$$\Phi_{Cx} = -p\,.$$

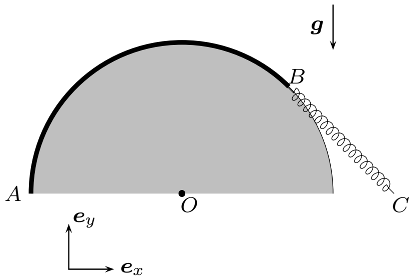
Pertanto, il modulo della reazione in C è

$$|\Phi_C| = p\sqrt{26}\,.$$

Q4. *In un piano verticale, un filo omogeneo AB di peso specifico costante $p/2$ è disposto su un semidisco di raggio $4R$ che non offre attrito. L'estremo A è libero, mentre B è soggetto ad una forza elastica di opportuna costante che lo attrae verso il punto C posto a distanza $4R\sqrt{2}$ dal centro O del semidisco, alla stessa quota di O. Trovare la reazione vincolare risultante $\boldsymbol{\Phi}$ esercitata all'equilibrio dal semidisco sul filo.*

Dai dati del problema segue che il filo sottende un angolo al centro di ampiezza $3\pi/4$ e dunque ha lunghezza $\ell = 3\pi R$. La forza peso agente sul filo è dunque pari a $-3\pi pR/2\boldsymbol{e}_y$ ed essa è in equilibrio con $\boldsymbol{\Phi}$ e la forza elastica applicata in B, pari a $2kR\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)$. Se imponiamo l'equilibrio delle forze agenti sul filo, otteniamo

$$\boldsymbol{\Phi} = 3\pi pR/2\boldsymbol{e}_y - 2kR\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)\,.$$



Per trovare k, calcoliamo la tensione τ lungo tutto il filo. Introduciamo l'angolo ϑ che OA forma con un raggio generico. Poiché non c'è attrito e la forza attiva è conservativa, abbiamo

$$\tau(\vartheta) = 2pR \sin \vartheta$$

dove abbiamo posto la costante di integrazione uguale a 0, perchè in A, dove $\vartheta = 0$ il filo è libero e la tensione è pertanto nulla. In B, dove $\vartheta = 3\pi/4$ la tensione è

$$\tau(B) = pR\sqrt{2}$$

e deve essere uguale al modulo della forza elastica che sollecita il filo in P. Pertanto

$$p\sqrt{2} = 4k$$

da cui segue $k = p\sqrt{2}/4$ che, sostituito nell'espressione di $\mathbf{\Phi}$ fornisce

$$\mathbf{\Phi} = pR[-\boldsymbol{e}_x + (1 + \frac{3\pi}{2})\boldsymbol{e}_y] \, .$$